DR. VERMES MIKLÓS

A görbületi sugárról

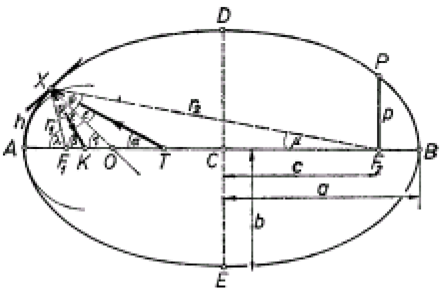
Néhány olyan kérdésről lesz szó, amely a görbületi kör és a görbületi sugár szerepét mutatja be, egyszersmind megismerkedünk ezekkel a fogalmakkal. Kiindulásul választjuk a homorú tükör képalkotását. Ismeretes, hogy az r rádiuszú homorú gömbtükör t távolságban levő tárgyakról k távolságban ad képet és a tengely közelében haladó sugarak esetében jó közelítéssel érvényes ez a törvény:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

$f = r/2$ neve fókusztávolság. A tengellyel párhuzamosan beeső sugarak a fókuszpontban találkoznak visszaverődés után, a fókuszpont tükörtől mért távolsága a fókusztávolság. t és k is a tükörtől számítandók.

Most az ellipszoid tükör viselkedését fogjuk tanulmányozni. Homorú tükrünk egy forgási ellipszoid, ennek metszetét tünteti fel az 1. ábra. Ellipszisünk fókuszai F_1 és F_2, fél nagytengelye $AC = CB = a$, fél kistengelye $DC = CE = b$, excentritása $F_1C = CF_2 = c$. Ismeretes, hogy $a^2 = b^2 + c^2$. Az X ponthoz tartozó vezérsugarak $r_1 = F_1X$, $r_2 = F_2X$. Az ellipszis definíciója szerint bármely pontban $r_1 + r_2 = 2a$.

Ellipszis alakú tükrünk A csúcspont körüli részét használjuk, és az ellipszis nagytengelyén helyezzük el T-ben a fényforrást. A belőle kiinduló egyik fénysugár α szöget zár be a tengellyel és X-ben éri el a tükröt. A beesési merőleges szerepét most r_1 és r_2 vezérsugarak szögfelezője (XO) tölti be mint a tükör érintkezőjének merőlegese, és ez az egyenes mindegyik vezérsugárral ψ szöget alkot. Az ε beesési szöggel érkező fénysugár ugyanakkora szöggel verődik vissza, majd K-ban metszi a tengelyt, β szögben. A vezérsugarak szögfelezője γ szögben metszi a tengelyt.



1. ábra

Az OTX_Δ-ből: $\varepsilon + \alpha = \gamma$,

a KOX_Δ-ből: $\beta = \gamma + \varepsilon$,

összegezve: $\alpha + \beta = 2\gamma$. Tehát γ szög α és β számtani középértéke. Az OF_2X_Δ és F_1OX_Δ elhelyezkedéséből látszik, hogy γ a vezérsugarak λ és μ szögének is számtani középértéke: $2\gamma = \lambda + \mu$, ezért: $\alpha + \beta = \lambda + \mu$. Ez minden közelítés nélkül pontosan igaz.

Ezután a szögek helyett távolságokat hozunk be, de ekkor olyan közelítéseket kell használnunk, amelyek csak a tengely közelében haladó fénysugarak esetében engedhetők meg. Először is a szögek helyébe a tangenseiket írjuk:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\lambda + \mathrm{tg}\mu,$$

azután beírjuk ezek közelítő értékeit az 1. ábra alapján:

$$\frac{h}{AT}+\frac{h}{AK}=\frac{h}{AF_1}+\frac{h}{AF_2}.$$

h kiegyszerűsíthető, ami azt jelenti, hogy képalkotás van, vagyis minden T-ből kiinduló fénysugár ugyanazon K pontban találkozik (a közelítéseket figyelembe véve). Az $AT = t$ távolságot tárgytávolságnak, az $AK = k$ távolságot képtávolságnak nevezzük. Továbbá $AF_1 = a - c$, $AF_2 = a + c$, tehát

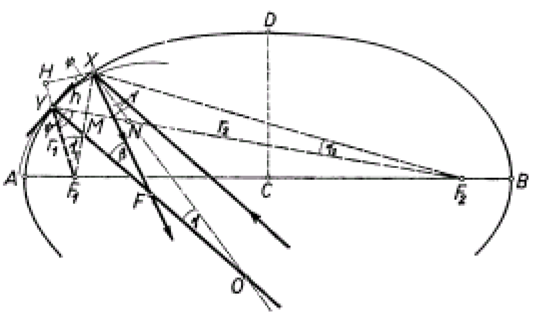
$$\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a+c}=\frac{a+c+a-c}{a^2-c^2}=\frac{2a}{b^2}.$$

Tehát a tárgytávolság és képtávolság reciprok értékeinek összege állandó. Ebben az állandóban

$$\rho=\frac{b^2}{a} \qquad (2)$$

ugyanazt a szerepet tölti be, mint a gömbtükör (1) alatti törvényében a gömb r rádiusza. Ha ezzel a ρ rádiusszal készítünk el egy gömbtükröt, és ellipszistükrünk helyére tesszük, akkor a képalkotásban semmi különbséget sem találunk. ρ-tól eltérő rádiuszú gömbök esetében T tárgy képe K-nál közelebb vagy távolabb keletkezne. Valamennyi létező kör közül ez a ρ rádiuszú kör simul legjobban az ellipszishez az A csúcspontban, és képalkotás szempontjából az ellipszistükör ρ rádiuszú gömbtükörrel pótolható. A (2) szerinti ρ rádiusz neve az A ponthoz tartozó görbületi sugári és a vele rajzolt kör (az 1. ábrán szaggatott vonal) a görbületi kör.

Az ellipszis függvényéből következik, hogy ρ egyenlő a fókuszpontban emelt $p = F_2P$ ordinátával, az ellipszis úgynevezett paraméterével. Hasonló számítást végezhettünk volna el a hiperbolára vonatkozóan is. Számításunk tartalmazza a gömbtükör távolságtörvényének levezetését is, mert kör esetében $a = b = r$ és $\rho = r$.



2. ábra

Eddigi gondolatmenetünk az ellipszis csúcspontjára vonatkozott, de meg kell vizsgálnunk az ellipszis egyéb pontjait is, vagyis meg kell keresnünk a görbületi sugár nagyságát az ellipszis tetszés szerinti pontjához tartozóan. Kissé hosszabb számítás vár ránk, de az eredmény érdekes lesz. 2. ábránk ellipszis alakú tükrének Y pontját vizsgáljuk és optikai tengelyünk az Y-ban rajzolt érintő merőlegese, az F_1YF_2 szög szögfelezője. Az YO optikai tengely mindegyik vezérsugárral ψ szöget alkot. A tengellyel párhuzamosan érkező fénysugár X-ben verődik vissza a tükörről, miközben XO szögfelező a beesési merőleges, amelynek két oldalán találjuk γ beesési és visszaverődési szögeket. Ugyanez a γ adja meg az XO szögfelezőnek a tengellyel alkotott $XOY\sphericalangle = \gamma$ szögét is. Azonnal látszik, hogy $\beta = 2\gamma$.

Az ellipszis YX íve F_1 fókuszból γ_1, F_2 fókuszból γ_2 szög alatt látszik. Az F_1MY és OMX háromszögekből, mert M-nél csúcsszög van:

$$\gamma_1 + \psi = \gamma + F_1XO\sphericalangle,$$

hasonlóan az F_2NX és ONY háromszögekből, az N-nél levő csúcsszög folytán:

$$\gamma_2 + F_2XO\sphericalangle = \gamma + \psi.$$

Az egyenleteket összeadva, és mivel XO az F_1XF_2 szög felezője:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma.$$

Érdekes, hogy γ_1 és γ_2 szögek számtani középértéke γ. Ez minden közelítés nélkül igaz. Ezzel β-ra vonatkozó összefüggésünk:

$$\beta = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Most vesszük figyelembe, hogy $YX = h$ ív igen kicsiny és ennek értelmében közelítünk. HX merőleges r_1-re, ezért $HX = h\cos\psi$. Radiánban kifejezve $\gamma_1 = HX/r_1 = h\cos\psi/r_1$. Ugyanígy $\gamma_2 = h\cos\psi/r_2$. Radiánban kifejezve $\beta = h/YF$. Ezeket felhasználva:

$$\frac{h}{YF} = \frac{h\cos\psi}{r_1} + \frac{h\cos\psi}{r_2}.$$

h kiesése azt bizonyítja, hogy a közelítések érvényessége mellett a párhuzamosan beeső sugarak *F* fókuszban találkoznak. A fókusztávolság:

$$YF = f = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)\cos\psi} = \frac{r_1 r_2}{2a\cos\psi}.$$

Még egy lépés szükséges a vezérsugarak kifejezésére. Felírjuk F_1YF_2 háromszögre a cosinus tételt:

$$(2c)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos 2\psi = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(2\cos^2\psi - 1) = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - 4r_1r_2\cos^2\psi =$$

$$(r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2\psi = (2a)^2 - 4r_1r_2\cos^2\psi,$$

innen a vezérsugarak szorzata:

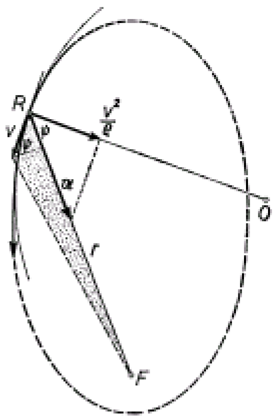
$$r_1r_2 = \frac{a^2 - c^2}{\cos^2\psi} = \frac{b^2}{\cos^2\psi}.$$

Ezt felhasználva a fókusztávolság $b^2/2a\ \cos^3\psi$, és a fókusztávolság kétszerese, a görbületi sugár:

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos^3\psi}. \qquad (3)$$

Ez az igen érdekes képlet adja meg általánosságban a görbületi sugarat az ellipszis tetszésszerinti pontjában. Az ekkora rádiuszú kör (a 2. ábrán a szaggatott vonal) simul legjobban az ellipszishez, ilyen rádiuszú gömbtükörrel helyettesíthetjük az ellipszistükröt. Érdekes, hogy az ellipszis keresztülhalad a görbületi körön, mert *Y*-tól *A* felé görbültebb, *Y*-tól *D* felé kevésbé görbült, mint a görbületi kör.

(3) képletünkben ψ a vezérsugarak szögének fele a független változó. Az ellipszis *A* csúcsában $\psi = 0$, $\cos\psi = 1$ és $\rho = b^2/a$, megegyezésben (2)-vel, ekkor ρ-nak minimuma van, itt az ellipszis a leggörbültebb. Az ellipszis *D* csúcsában $\cos\psi = b/a$, és $\rho = a^2/b$; most ρ-nak maximuma van, itt az ellipszis a legkevésbé görbült. Különben ρ felírható a paraméterrel is: $\rho = p/\cos^2\psi$.



3. ábra

Nemcsak a fénytanban, hanem a mechanikában is nagy szerepe van a görbületi körnek. Ismeretes, hogy *m* tömegű test *r* rádiuszú körpályán ω szögsebességgel, *v* tényleges sebességgel végbemenő körmozgásához $P = m\omega^2 r = mv^2/r$ centripetális erő szükséges. De mi van nem körön végbemenő görbevonalú mozgás esetében? A bolygómozgás példáján adunk erre választ.

Bolygónk ebben a pillanatban az *F*-ben álló igen nagy *M* tömegű Naptól $RF = r$ távolságban halad *v* sebességgel; a sebesség merőlegese ψ szöget alkot *r* összekötő egyenessel (3. ábra). Ha a bolygó *m* tömege elhanyagolható a Nap tömege mellett, akkor a Nap nyugalomban levőnek tekinthető. Newton felfedezése szerint a bolygó és a Nap között fmM/r^2 nagyságú kölcsönös vonzóerő működik az összekötő egyenes mentén (*f* a gravitációs állandó). Ennek hatására a bolygó valamilyen görbe pályán mozog, még nem tudjuk, milyenen.

Először használjuk fel a tömegvonzási erő azon tulajdonságát, hogy centrális erő, vagyis a tömegek összekötő egyenesében hat. Ebből következik függetlenül az erőtörvény és a pálya alakjától, hogy a területi sebesség állandó. A vezérsugár által 1 másodperc alatt leírt terület:

$$\frac{vr\cos\psi}{2} = K. \qquad (4)$$

Ez a mennyiség állandó egy magára hagyott bolygó esetében. A törvény bizonyítása megtalálható a Középiskolai Matematikai Lapok XIX. kötet. 1959. nov.-i számában a 154. oldalon. Az összekötő egyenes mentén működő erő következménye az is, hogy a pálya v-n és F-en átmenő síkban fekszik.

Csak most használjuk fel az erőtörvény négyzetes sajátságát. A bolygó $a = fM/r^2$ teljes gyorsulása F felé irányul, és van az érintőre merőleges összetevője:

$$a\cos\psi = \frac{fM\cos\psi}{r^2}.$$

A gyorsulás ezen összetevőjét kell egyenlővé tenni a centripetális gyorsulással. Ennek kiszámítását úgy végezzük, hogy az ismeretlen alakú görbe pályát R pontban $RO = \rho$ sugarú görbületi körével helyettesítjük, tehát a centripetális gyorsulás v^2/ρ. Egyenlővé téve a teljes gyorsulás merőleges összetevőjével:

$$\frac{fM\cos\psi}{r^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Innen a görbületi sugár:

$$\rho = \frac{v^2r^2}{fM\cos\psi}.$$

Ide behelyettesítjük (4) alapján vr értékét:

$$\rho = \frac{\frac{4K^2}{fM}}{\cos^3\psi}. \qquad (5)$$

A számláló állandó és a nevezőben az irányt meghatározó szög cosinusának köbe szerepel! Óriási eredmény: ez az ellipszis görbületi sugara. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a tömegvonzási törvény alapján létrejövő bolygópályák ellipszisek (kúpszeletek), amelyek egyik fókuszában a Nap áll.

Számításunk eredménye Kepler I. törvénye. Kepler II. törvényét a területi sebesség tétele tartalmazta. Hátra van még Kepler III. törvényének bizonyítása. (5) alatti eredményünkben $4K^2/fM = p = b^2/a$ az ellipszis paramétere. Ebből a területi sebesség:

$$K = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{fM}{a}}.$$

Minthogy az ellipszis területe πab, ha a bolygó keringési ideje T , akkor a területi sebesség:

$$K = \frac{\pi ab}{T}.$$

Egyenlővé téve:

$$\frac{b}{2}\sqrt{\frac{fM}{a}} = \frac{\pi ab}{T},$$

innen a keringési idő négyzete:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{fM}\cdot a^3.$$

Ez Kepler III. törvénye, amely szerint a keringési idő négyzete arányos a fél nagytengely köbével. Igen nevezetes, hogy a kistengely hossza nem szerepel, ettől független a keringési idő. A bolygómozgás egyéb kérdéseire is választ kaphatunk képleteinkből.

Megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok XXVIII. kötet 3. számában, (1964. évi 3. szám)