IX. Mozgás állandó erő hatására.

Vizsgáljuk egy űrhajó mozgását, amelyet állandó erő gyorsít. Ez úgy értendő, hogy indításkor beállítják az üzemanyagot kibocsátó fúvókát egy állandó kg/sec üzemanyag-kiáramlásra és meghagyják az űrhajósoknak, hogy ezen a fúvóka-csap beállításon ne változtassanak.

A földi állomásról a távozó rakétát figyelik és megállapítják helyzetét, mozgásának sebességét és gyorsulását mint az idő függvényét. A helyzetmegállapítást úgy kell érteni, hogy a rakéta pályája mentén a megfigyelő állomásokon feljegyzik az áthaladás ottani időpontját és az adatokat alkalmilag közlik a földi állomással.

A IV. és V. fejezet ábrái most nem használhatók, mert a sebesség nem állandó.

Miként észlelik a Földről az állandó erő hatására gyorsulva távozó rakéta mozgását? Az állandó erő az impulzus időegységre jutó változása:

$$F = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Az indulás pillanatában az m_0 nyugalmi tömeg és a_0 indulási gyorsulás szorzata adja meg az erőt: $F = m_0 a_0$. Ugyanis kis sebességnél az erő kétféle, gyorsuláson és impulzusváltozáson alapuló meghatározása még ugyanazt mondja. Az integrálandó függvény:

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m_0 a_0 \cdot \mathrm{d}t.$$

Itt $m_0 a_0$ egy adott, állandó érték. Az integrálás eredménye, ($t = 0$, $v = 0$ kezdő érték mellett):

$$\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = m_0 a_0 \cdot t.$$

Átrendezve kapjuk a sebességet mint az idő függvényét:

$$v = \frac{a_0 t}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}.$$

Hasznos ennek a képletnek egy átalakított formája is. Integrálásunk eredményét így is írhatjuk:

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = vk = a_0 t,$$

tehát a sebességet ezzel a képlettel is számíthatjuk:

$$v = \frac{a_0 t}{k},$$

illetőleg ebből állandó erejű mozgás esetében k számára következik:

$$k = \frac{a_0 t}{v} = \sqrt{1+\left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}.$$

Az út törvényét a sebesség integrálásával kapjuk. Mivel

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

ezért

$$\mathrm{d}s = \frac{a_0 t}{\sqrt{1+\frac{a_0^2}{c^2}t^2}} \cdot \mathrm{d}t.$$

Az integrálás eredménye ($t = 0$, $v = 0$ kezdő érték mellett):

$$s = \frac{c^2}{a_0} \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2} - 1\right] = \frac{c^2}{a_0} \cdot (k-1).$$

A mozgás kezdetén használható ez a sorbafejtés:

$$s = \frac{a_0}{2} \cdot t^2 - \frac{a_0^3}{8c^2} \cdot t^4 + \ldots$$

A gyorsulás törvényét a sebesség differenciálásával kapjuk:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{a_0}{\left[1+\left(\frac{a_0}{c} \cdot t\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{a_0}{k^3}.$$

A mozgási energiát, vagyis a munkavégzést, a hajtómű energiafogyasztását az erő és az út szorzata adja meg.
(A tanulság kedvéért megvizsgáljuk a tömeg és a gyorsulás szorzatát:

$$m_0 k \cdot \frac{a_0}{k^3} = \frac{m_0 a_0}{k^2} = m_0 a_0 \cdot \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Ez a mennyiség nem marad állandó és nem egyenlő az erővel. Látható, hogy a relativitáselméletben az erőnek az impulzusváltozáson alapuló meghatározása használható csak.)

Mit észlelnek az állandó hajtóerő hatására mozgó űrhajón? Ismét nem használhatjuk a IV. és V. fejezet nagy ábráit, mert azok egyenletes mozgásra vonatkoznak.

Egy bizonyos pillanatban a rakétáról jelzett $\mathrm{d}\tau$ időközt a kilövőállomásról k-szor hosszabb $\mathrm{d}t$ időköz formájában észlelik:

$$\mathrm{d}t = k \cdot \mathrm{d}\tau.$$

Ismerjük az állandó erejű mozgás esetében k függését az időtől:

$$k = \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{c^2} \cdot t^2}.$$

Ezt felhasználva:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2}{c^2} \cdot t^2}} \cdot \mathrm{d}t.$$

Integrálva ($t = 0$, $\tau = 0$ kezdő értékek mellett):

$$\tau = \frac{c}{a_0} \cdot l\ln\left[\frac{a_0 t}{c} + \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{c^2} \cdot t^2}\right] = \frac{c}{a_0} \cdot \ln\left[\frac{a_0 t}{c} + k\right].$$

τ az úgynevezett sajátidő, amelyet az űrhajón észlelnek.

A következő táblázat numerikus adatokat tüntet fel abban az esetben, ha a nyugalmi tömeg m_0 = 1 kg és az állandó erő F = 50 newton. Az indulási gyorsulás a_0 = 50 m/sec^2. Ha a klasszikus fizika törvényei szerint számolnánk, 2 és fél hónap alatt elérnénk a fénysebességet.

Induláskor még a közönségesen ismert $s = at^2/2$, $v = at$ törvények érvényességét látjuk.

Űrhajónk körülbelül 1 óra múlva menne el a Hold mellett. (Az Apollo-űrhajók gyorsító ereje csak kb. negyedóráig működött, azután az elért, majd később lassuló, hajításszerű repüléssel kb. három nap alatt jutottak el a Holdig.) Kb. 1 nap múlva volnánk a Napnál. Körülbelül 10 nap múlva kerül sor szembeszökően a relativisztikus jelenségekre. A tömeg k-val egyenes arányban növekszik, a gyorsulás mindig kisebb és kisebb lesz. Egy-két év alatt gyakorlatilag elérjük a fénysebességet. (A táblázat a 300000 km/sec kerekértékű fénysebesség alapján készült.) A legközelebbi állócsillagot (Proxima Centauri) kb. 4 év alatt érjük el, mert ekkor majdnem fénysebességgel mozgunk. Az Andromeda-galaxisig kb. 2000000 évig kellene utazni, mert ez a csillagrendszer kb. kétmillió fényévnyire van. De ez időszempontból nem jelentene lehetetlenséget. Az űrhajón a sajátidő egy-két hónap múlva már észrevehetően lassabban telik, mint a földi idő. A legközelebbi állócsillag elérésének rakétán átélt ideje kb. háromnegyed év. Az Andromeda-galaxis elérésének sajátideje 3,1 év. Fantasztikus filmeken néha az űrhajó műszerfalán két órát látunk, az egyik a földi időt, a másik a sajátidőt mutatja.

A nagytávú űrhajózást az energiaprobléma teszi reménytelenné. Táblázatunk az 1 kg-os tömeg felgyorsításához szükséges energiát tünteti fel. Az 5 év alatt felhasználandó energia Magyarország évi energiatermelésének kb. kétszerese, az Andromédáig szükséges energia pedig félmilliószorosa. Az $E_0 = m_0c^2$ nyugalmi energia három hónapig volna elegendő, ha valahogy felhasználható volna. De akkor mi marad az űrhajóból és az űrhajósból? Mindez 1 kg hasznos rakétasúlyra vonatkozik. De az óriási mennyiségű üzemanyagot is fel kellene gyorsítani, hiszen rakétánk a hosszú (földi idejű) menetidő alatt folyamatosan tüzel, egészen a célig.

t	k	s	v km/sec	a m/sec^2	τ	E_{kin} joule
0	1	0	0	50	0	0
1 sec	$1+1{,}39\cdot10^{-14}$	25 m	0,05	$50-2{,}08\cdot10^{-12}$	1 sec	1250
2 sec	$1+5{,}56\cdot10^{-14}$	100 m	0,1	$50-3{,}33\cdot10^{-11}$	2 sec	5000
10 perc	$1+5\cdot10^{-9}$	9 000 km	30	$50-7{,}50\cdot10^{-7}$	10 perc	$4{,}50\cdot10^{8}$
1 óra	$1+1{,}8\cdot10^{-7}$	324 000 km	180	$50-2{,}70\cdot10^{-5}$	1 óra	$1{,}62\cdot10^{10}$
0,5 nap	1,000 026	46,8 millió km	2 160	44,996	0,5 nap	$2{,}34\cdot10^{12}$
1 nap	1,000 104	186,5 millió km	4 319	49,98	1 nap	$9{,}32\cdot10^{12}$
10 nap	1,0103	$1{,}854\cdot10^{13}$ m	42 760	48,49	9,97 nap	$9{,}27\cdot10^{14}$
30 nap	1,0893	$1{,}607\cdot10^{14}$ m	118 975	38,68	29,1 nap	$8{,}04\cdot10^{15}$
60 nap	1,3216	$5{,}789\cdot10^{14}$ m	196 126	21,66	54,3 nap	$2{,}89\cdot10^{16}$
120 nap	1,9966	0,179 fényév	259 641	6,28	91,3 nap	$9{,}00\cdot10^{16}$
1 év	5,354	0,784 fényév	294 733	0,325	0,448 év	$3{,}29\cdot10^{17}$
5 év	26,320	4,558 fényév	299 772	0,002 74	0,753 év	$2{,}28\cdot10^{18}$
10 év	52,609	9,29 fényév	299 783	$3{,}43\cdot10^{-4}$	0,884 év	$4{,}65\cdot10^{18}$
20 év	105,21	18,76 fényév	299 805	$4{,}42\cdot10^{-5}$	1,016 év	$9{,}38\cdot10^{18}$
50 év	263,3	47,22 fényév	299 892	$2{,}74\cdot10^{-6}$	1,190 év	$2{,}37\cdot10^{19}$
100 év	526,5	94,59 fényév	299 972,89	$3{,}43\cdot10^{-7}$	1,321 év	$4{,}73\cdot10^{19}$
500 év	2630	473 fényév	299 998,92	$2{,}75\cdot10^{-9}$	1,627 év	$2{,}37\cdot10^{20}$
1000 év	5260	947 fényév	299 999,73	$3{,}94\cdot10^{-10}$	1,758 év	$4{,}73\cdot10^{20}$
2000 év	10520	1893 fényév	299 999,93	$4{,}30\cdot10^{-11}$	1,89 év	$9{,}47\cdot10^{20}$
5000 év	26305	4735 fényév	299 999,99	$2{,}75\cdot10^{-12}$	2,14 év	$2{,}37\cdot10^{21}$
2110000 év	$1{,}11\cdot10^{7}$	1998000 fényév	299 999,999 999 939	$3{,}66\cdot10^{-20}$	3,10 év	$9{,}99\cdot10^{23}$

Vissza a tartalomjegyzékhez
INDEX