VII. Tömeg és energia.

Egyszerű, közelítő tárgyalás.

Az előző fejezetben láttuk, hogy a sebességgel együtt növekszik a tömeg. De a mozgási energia is növekszik. A VI. rész egyszerű tárgyalásában szereplő adatok felhasználásával kiszámítjuk $mv^2/2$ alapján a mozgási energiákat.

v sebesség km/sec	v sebesség m/sec	m kg	Δm kg	$mv^2/2$ joule	ΔE joule
0	0	1		0	
			0,014		$12{,}6\cdot10^{14}$
50000	$5\cdot10^7$	1,014		$12{,}6\cdot10^{14}$	
			0,06		$53\cdot10^{14}$
100000	$10\cdot10^7$	1,06		$53\cdot10^{14}$	

A tömegnövekedés és energiagyarapodás együttesen következnek be, egymással egyenes arányban:

$$\frac{12{,}6\cdot10^{14}}{0{,}014}=9\cdot10^{16}=\left(3\cdot10^8\right)^2,\qquad \frac{53\cdot10^{14}}{0{,}06}=9\cdot10^{16}=\left(3\cdot10^8\right)^2.$$

Az arányossági szorzó a fénysebesség négyzete:

$$\Delta E = c^2\cdot\Delta m.$$

A pontos tárgyalás.

Amikor egy erő egy test gyorsításakor munkát végez, akkor ez a munkavégzés jelentkezik mint mozgási energia.

A klasszikus fizikában, kis sebességek esetében F erő $a = F/m$ gyorsulást okoz, a bekövetkező egyenletesen gyorsuló mozgás útja $at^2/2$. A gyorsító erő munkavégzése:

$$W = Fs = \frac{m(at)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Az erőt az impulzus időegységre jutó megváltozásával is definiálhatjuk. Az impulzus (mozgásmennyiség, lendület): $I = mv$, az erő

$$F = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma.$$

azután a számítás ugyanúgy folytatódik.

A speciális relativitáselmélet szerint, (amelynek alkalmazása nagyobb sebességek esetében kötelező) az erőt csak az impulzus időegység alatti megváltozásával lehet definiálni. Egyébként a gondolatmenet ugyanaz: az erő

munkavégzése jelenti a mozgási energiát. A munkavégzés, illetve energiagyarapodás kis szakaszon:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E = F \cdot \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}I = v \cdot \mathrm{d}I.$$

A változó v sebességet mint az impulzus függvényét akarjuk felírni:

$$I = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{innen:} \quad v = \frac{cI}{\sqrt{m_0^2 c^2 + I^2}}.$$

Az integrálandó függvény:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E = c \cdot \frac{I}{\sqrt{m_0^2 c^2 + I^2}} \cdot \mathrm{d}I.$$

Integrálunk I = 0-tól I-ig:

$$W = E = c \cdot \int_0^I \frac{I}{\sqrt{m_0^2 c^2 + I^2}} \cdot \mathrm{d}I = c \cdot \sqrt{m_0^2 c^2 + I^2}.$$

Az impulzus

$$I = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

értékét visszahelyettesítve megkapjuk az energiát mint a sebesség függvényét:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot k \cdot c^2.$$

Vizsgáljuk meg eredményünket. Amikor $v = 0$, $E_0 = m_0 c^2$. Ez az energia már benne van a nyugvó tömegben (szerepéről példákat találunk a VIII. részben). A v sebességre történt felgyorsítás után az energiatöbblet, vagyis a mozgási energia:

$$E_{\mathrm{kin}} = E - E_0 = m_0 k c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (k - 1) = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right].$$

Ez a mozgási energia bármely sebességnél érvényes pontos képlete. Kisebb sebességeknél használható ez a sorbafejtés:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{m_0 v^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \ldots \right].$$

A nyugalomban levő test tömege m_0, v sebesség mellett $m = m_0 k$, a tömeg növekedése a felgyorsítás végéig:

$$\Delta m = m - m_0 = m_0 k - m_0 = m_0 (k - 1).$$

Közben az energia növekedése:

$$\Delta E = m_0 c^2 (k - 1).$$

Látható az egyenes arányosság: $\Delta E = c^2 \cdot \Delta m$,
illetve a tömegnövekedés: $\Delta m = \Delta E / c^2$.

Amennyiben az idő- és távolságadatokra a Lorentz-transzformáció érvényes, akkor ennek elkerülhetetlen következménye a tömegnövekedés és ennek folytatásaként a megszerzett mozgási energia és a közben bekövetkező tömeggyarapodás. Mivel a természetben kivétel nélkül érvényesnek bizonyult az energiamegmaradás törvénye, ezért Einstein feltételezte, hogy bármilyen energiagyarapodás a tömeg, a tehetetlenség arányos növekedésével jár együtt. A tapasztalat, sőt a műszaki gyakorlat mindezt pontosan igazolta. A $\Delta m = m_0(k-1)$ és $\Delta E = c^2 \cdot \Delta m$ törvényeknek évtizedek óta nagy műszaki jelentőségük van atomfizikai gyorsítók és atomreaktorok tervezésénél.

VIII. Tömeg és energia (példák)

Vissza a tartalomjegyzékhez

INDEX