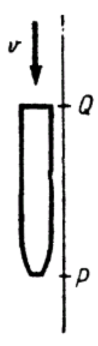
DR. VERMES MIKLÓS

Hogyan látható a relativisztikus távolságrövidülés?

Több mint félszázada ismeretes a Lorentz-transzformáció, a speciális relativitáselmélet alapvető állítása. Azóta hiteles ismeretté vált, hogy egy távolság (méterrúd), amelynek hossza saját koordinátarendszerében mérve r, egy hozzá képest v sebességű, egyenes vonalú egyenletes mozgást végző koordinátarendszerből mérve $r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ hosszúságúnak adódik. Itt c a fény terjedési sebessége, v a koordinátarendszerek kölcsönös mozgási sebessége, $\kappa = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ a távolság csökkenésének mértéke. Tehát a természet olyan, hogy mozgásban levő r távolság álló rendszerből vizsgálva rövidebbnek, $\frac{r}{\kappa}$-nak adódik. A mozgás irányára merőleges távolságok változatlanok maradnak.

E tény alapján a relativitáselmélet népszerűsítői fantáziájukat működtetve különféle példákon szokták leírni, hogy a nagyon gyorsan mozgó kerékpáros a kerek virágágyat ellipszis formájúnak, a gömb alakú labdát lelapított forgási ellipszoidnak, az űrhajós az állócsillagot ugyancsak lelapított forgási ellipszoidnak, korongnak látja és így tovább. Így olvasható ez szinte mindenütt, G. Gamow Relativisztikus városában (a Mr. Tompkins in the Wonderland című könyvben), valamint így szerepelnek ezek a példák a Gondolat kiadásában 1958-ban megjelent A relativitáselmélet című ismeretterjesztő könyv 40. oldalán is. Azonban néha megesik, hogy lényegében régóta tisztázott dolgokat érdemes apró részleteiben is utánagondolni. Most is ez történt. James *Terrell* két cikkében (Phys. Rev. 116. 1041. 1959. és Bull. Am. Phys. Soc. Ser. II. 4. 294. 1959., valamint R. Penrose, Proc. Cambridge Phil. Soc. 55. 137. 1959.) bebizonyította, hogy a létezhető legnagyobb sebességek esetében is az űrhajós a gömb alakú labdát, Napot vagy állócsillagot pontosan gömb alakúnak látja. Nem azért, mert nem igaz a Lorentz-belapulás, hanem mert a látás, a fény véges terjedési sebessége folytán néha más jelenséget mutat, mint amilyen a reális jelen. Ilyesmire példát találhatunk a régi, nemrelativisztikus fizikában is: egy óra felé gyorsan közeledő megfigyelő gyorsabban, a távolodó megfigyelő lassabban látja járni az órát a Doppler-jelenség következtében, mert a fénynek terjedéséhez időre van szüksége. (A nemrelativisztikus fizikában ennek ellenére a mozgásban levő rendszerek időtartamai egyezőek.) Hogy miként észleli a megfigyelő a belapult ellipszoid formájú égitestet mégis gömb alakúnak, arról szólnak ezek a sorok.

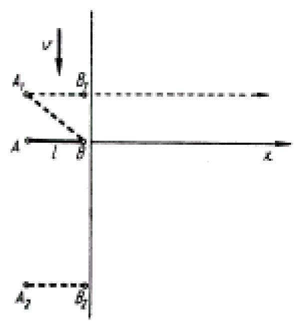


1. ábra

A relativitáselmélet mozgó távolság mérésére pontos mérési előírást állapít meg. Adva van egy vonat (1. ábra). Indulás előtt, álló helyzetben nincs probléma a vonat hosszának mérését illetőleg: meg kell nézni, hogy a vonat eleje és vége a sínek mellé fektetett skála mely pontjainál állnak és a vonat hossza $r = PQ$. Ha a vonatban fektetünk végig egy skálát, ez a mérés is r hosszúságot ad. Ezután vonatunk kifut az állomásról, a sínhálózat különböző ágain végighaladva egyszer csak visszatér az állomásra és állandó v sebességgel átrobog rajta. Feladat: a mozgó vonat hosszának mérése az állomásról. Elvégzésére a relativitáselmélet a következő utasítást adja. A sín mellé véges-végig megfigyelők állnak. Ugyanabban a pillanatban, mondjuk 12 óra 00 perckor fel kell tartania a kezét annak a két megfigyelőnek, akik mellett a vonat eleje, illetőleg vége haladt el ugyanebben a pillanatban. Azután szép kényelmesen megmérik a sínek mellett fekvő skálán e két pont távolságát. Tény, a természet tulajdonsága, hogy e mérés eredménye így elvégezve, most $\frac{r}{\kappa}$. Tehát úgy kellett a mozgó távolságot az álló koordinátarendszerből mérni, hogy az ugyanazon pillanatban fedésben levő pontok távolságát állapítottuk meg. Az „álló” világot és a „mozgó” világot úgy kell elképzelni, mint egy-egy átlátszó, átjárható teret, amelyek egymásba vannak dugva és egymáshoz képest mozognak. A mérés a két rendszer pillanatnyilag ugyanazon a helyen fedésben levő pontjainak felhasználásával megy végbe. Ugyanez a helyzet, ha az állomás hosszát kell lemérni a mozgó vonatról.

Most következik az űrhajós esete, aki nagy sebességgel száguld el egy gömb alakú csillag mellett. Tudjuk, hogy a csillag rádiusza r. Az űrhajós v sebességgel mozgó rendszeréből észlelve a mozgás irányába eső csillagrádiusz $\frac{r}{\kappa}$, a mozgás irányára merőleges valamennyi rádiusz r. Mit jelent az, hogy „észlelve”? Azt, amit az előbb leírtunk: a térben lenyomatot kell venni azokról a pontokról, ahol a csillag felszíne egyidejűleg van jelen. A művelet eredménye, hogy *az álló gömb a mozgó rendszer számára lapított forgási ellipszoid*. Azonban az űrhajós nem tapogatja, hanem nézi és fényképezi a csillagot. Ekkor pedig érdekes dolgok jönnek közbe annak folytán, hogy a pillanatnyilag szemébe jutó fénysugarak a mozgó tárgy különböző pontjairól különböző időkben indultak el.

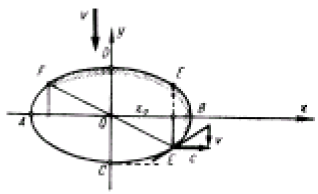
A 2. ábrán egy AB-vel jelzett, l hosszúságú, állandóan világító fényforrás (fénycső) látható, amely állandó v sebességgel halad felülről lefelé. A megfigyelő az x-tengely irányában helyezkedik el, valahol messze. A döntő körülmény: a szem ideghártyáján kirajzolódó kép, a fényképezőlemezre vetítődő kép azon fénysugarak felhasználásával keletkezik, amelyek egyszerre érkeznek meg. A fényképezőgép zárja egy igen rövid pillanatra nyílik ki, ekkor bejutnak mindazon fénysugarak, amelyek akkor épp ott vannak, az előbb vagy később érkezők kinn rekednek. Mozgó tárgyról a szem is csak azon sugarak felhasználásával tud képet alkotni, amelyek egyszerre érkeznek az ideghártyára. Ha elhagynók ezt a kikötést, a szem nem tudná, hogy a tárgy egyik, illetve másik végéről állandóan érkező sugarakat hogyan párosítsa össze képpé. Ha hosszú ideig nyitva tartott fényképezőgéppel észlelnénk a folyamatosan világító, mozgó fénycsövet, akkor egyik végén sem határolt vonalat kapnánk lemezünkön. Az észlelésnek ez a módja nyilvánvalóan teljesen értelmetlen.



2. ábra

Az x-tengelyen messze jobbra elhelyezkedő megfigyelőhöz az A-ból és B-ből egyszerre induló fénysugarak nem érkeznek egyszerre, mert A pont l darabbal messzebb van az észlelőtől, mint B pont. Ezen l darab befutásához még kell $\frac{l}{c}$ idő. A fénycső baloldali végéről az a fénysugár érkezik a B-ből indulóval egyidejűleg a megfigyelőhöz, amely $\frac{l}{c}$ idővel korábban indult. Ekkor a fénycső még $v \cdot \frac{l}{c} = l \cdot \frac{v}{c}$ darabbál hátrább volt A_1B_1-ben. Amíg a fénycső A_1B_1 helyzetéből eljut az AB helyzetbe, a baloldali végétől a jobboldali végéig folyamatosan mindig más-más pontból indul ki az a fénysugár, amely egyidejűleg fut be a megfigyelőhöz és alkotja a pillanatfelvételt a lemezen. Az egyszerre érkező fénysugarak úgy mutatják, mintha a tárgy helyzete A_1B volna. (Rajzunk v = 0,8c esetre vonatkozik.) A megfigyelő fényképezőlemezén egy vonalat kap, holott azt várta, hogy a fénykép, a *látvány* egyetlen pont lesz, hiszen megfigyelése az x-tengely irányából, a fénycső egyenes meghosszabbításából történt. Tudomásul kell vennünk, a fényképezőgép, a szem egyetlen B pont helyett A_1B helyzetű fénycsövet lát. Egyébként a felvétel készítése pillanatában a fénycső már lényegesen eltávolodott AB helyzetétől valahová A_2B_2-be. Megértjük: az aberráció jelenségéről van szó, amelyet a csillagászok régóta jól ismernek.

A teljesség kedvéért megvizsgálhatjuk, mit észlelne megfigyelőnk, ha a fénycsövet az AB helyzetben egyetlen pillanatra villantanánk fel.



3. ábra

Ekkor, miután a fénycső már egy ideje A_2B_2-be távozott, sorra érkeznének a lemez (ideghártya) ugyanazon pontjára a fénycső egyes pontjaiból induló pillanatnyi fényjelek. Tehát ugyanabban az egy pontban $\frac{l}{c}$ ideig tartó állandó világítást észlelnénk.

Most következik a mozgó, világító gömb, a csillag megfigyelése. Újabb érdekességekkel fogunk találkozni. r sugarú gömbünk felülről lefelé halad v sebességgel, (3. ábra; itt és a 4. ábrán v = 0,8c, κ = 5/3). A Lorentz-transzformáció szerint a gömb a mi álló koordinátarendszerünkből letapogatva (a vonatpéldában rögzített távolságmérések eredménye alapján) egy lapított forgási ellipszoid, melynek a mozgás irányába eső fél kistengelye $OC = OD = \frac{r}{\kappa}$, a mozgás irányára merőleges méretei pedig változatlanok, így $AO = OB = r$. A rajzunk síkjában fekvő ellipszis-metszet függvénye

$$y = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\kappa} \qquad (1)$$

Amikor a csillag az ábra szerinti helyzetben van, akkor a megfigyelő valahol messze jobbra, az x-tengely meghosszabbításában helyezkedjen el, és ott észleljen. A csillag, a forgási ellipszoid folyamatosan világít.

Az észlelés történjen ismét látással, vagyis úgy, hogy egyetlen pillanatra nyitjuk ki a fényképezőgép zárját, illetve szemünket, az észlelőhöz egyszerre *érkező* sugarakból alkotva képet. Az egész világító csillag mely részéről érkezik fény a megfigyelőhöz? A gyanútlan olvasó azt gondolná, hogy a C-B-D félellipszoidról. Téved. Nyilvánvaló, hogy B pontról akadálytalanul jut el a fénysugár a megfigyelőhöz, de C-ből nem! Ugyanis a fénysugár elindul a megfigyelő felé, az x-tengellyel párhuzamosan, de a csillag is mozog lefelé és elvágja a C-ből induló fénysugár útját, így C-t nem látjuk. De akkor hol van a CB íven az az E elhatároló pont, amely megmutatja, mely rész látható a megfigyelő számára és mely rész nem? Helyettesítsük az ellipszist E szomszédságában, kis darabon egy egyenessel. A határesetet az jellemzi, hogy ezen egyenes hajlásszögének tg-e éppen $\frac{v}{c}$. Ekkor, mivel az ellipszis v sebességgel mozog lefelé, a fény c sebességgel megy jobbra, a fény az érintő mentén továbbjut és elérkezik a megfigyelőhöz. Az érintő szögének tangensét (1) differenciálhányadosa adja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\kappa\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

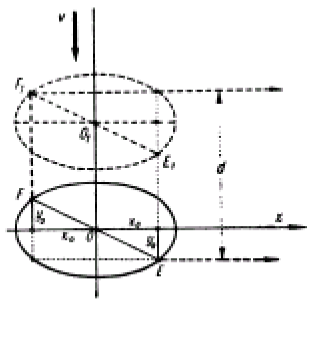
Ennek kell E pontban $\frac{v}{c}$-vel egyenlőnek lennie:

$$\frac{x}{\kappa\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{v}{c}.$$

Egyenletünk megoldása és (1) felhasználása adja a nevezetes E pont koordinátáit:

$$x_0 = \frac{v}{c} \cdot r, \qquad y_0 = \frac{r}{\kappa^2}. \qquad (2)$$

Tehát a CB ívből a megfigyelő nem látja, eltakartnak tapasztalja CE részt és csak EB részt látja. Azonkívül látja BD negyedrészt teljesen, sőt még a DA részből is egy darabot. Az elhatárolást az E-vel ellentétesen fekvő F pont adja meg. Az FD ívdarabon az ellipszis elszalad az útból és engedi, hogy a felszínről kiinduló sugarak az x-tengellyel párhuzamosan eljussanak a megfigyelőhöz. Végeredményben megfigyelhető a csillag felületének *E-B-D-F* része. Érdekes, hogy az ellipszoid menetirányban fekvő oldalán csak kis részt látunk, hátoldalán viszont a felezővonalnál hátrább is látjuk a felszín egy részét.



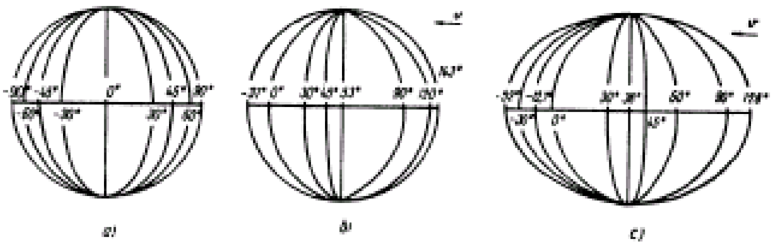
4. ábra

Hátra van a végső összegezés; mit észlel megfigyelőnk, ha egy pillanatra kinyitja fényképezőgépe zárját? A képet most is az egyszerre érkező fénysugarak alkotják. Ezek közül a legszélsőbbek azok, amelyek az ellipszis F és E pontjaiból indulnak el. Azonban F távolabb van a megfigyelőtől, mint E, ezért F-ből előbb kell a fénysugárnak elindulnia, hogy az E-ből kiindulóval egyszerre érkezzen a megfigyelőhöz, (4. ábra). Az F és E pontok távolsága a fénysugár irányában $2x_0$ és ez (2) alapján $2x_0 = 2\cdot\frac{v}{c}\cdot r$. Ekkora távolságot a fénysugár $2\cdot\frac{v}{c^2}\cdot r$ idő alatt fut be, vagyis a fény akkor indult el F-ből, amikor az ellipszoid még $v\cdot 2\cdot\frac{v}{c^2}\cdot r = 2\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot r$ darabbal hátrább volt és F helye akkor még F_1 volt. A fényképen a csillag képének a mozgás irányába eső átmérőjét az E-ből és F_1-ből kiinduló sugarak határozzák meg. Ezek távolsága pedig $d = FF_1 + 2y_0$. Itt $FF_1 = 2\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot r$, az ellipszis útja, y_0 pedig (2)-ből ismeretes. Tehát a látszólagos átmérő $d = 2\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot r + 2\cdot\frac{r}{\kappa^2}$. Ezt kifejtjük, κ jelentését felhasználva:

$$d = 2\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot r + 2r\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 2r.$$

A mozgásra merőleges irányban *látható* átmérő változatlanul $2r$ marad. Tehát megvan meglepő eredményünk: a csillag pontosan gömbnek *látszik*, mintha nem is mozogna.

Az érdekes eredmény létrejöttében három körülmény dolgozik össze: a relativisztikus távolságrövidülés, az aberráció és az a körülmény, hogy az egyidejűleg beérkező sugarak adják a képet. Amennyit a Lorentz-transzformáció rövidít, annyit nyújt meg az a körülmény, hogy a távolabb fekvő oldalról korábban kell elindulni a fénysugárnak. J. Terrell felismerése szerint állandó sebességgel mozgó gömb a szokásos nézési és fényképezési eljárás esetében változatlanul gömbként tűnik fel, a relativisztikus távolságrövidülés ellenére, illetve helyesen ennek következtében.

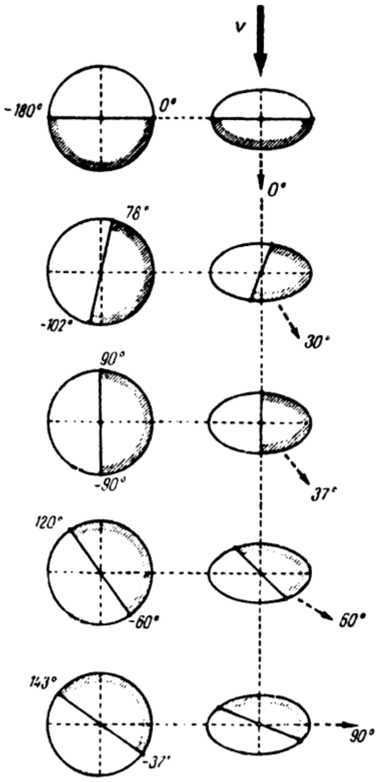


5. ábra

Számításunk arra az esetre vonatkozott, amikor a megfigyelő a pályára merőleges egyenes mentén helyezkedett el. Kissé hosszadalmasabb számítás azt az eredményt adja, hogy a pályához képest bármilyen ferde irányból nézzük is a közeledő csillagot, azt mindig ugyanakkora átmérőjű gömbnek látjuk. De a gömb felületi alakzatai már erősen eltorzultan látszanak az eredetihez képest. Az 5. ábra *a* rajza a gömb tényleges, egyik oldalára felrajzolt délkör-rendszerét mutatja nagy távolságból szemlélve. Ezt látja az *x*-tengelyen nagy távolságban elhelyezkedő megfigyelő, ha a gömb áll. Ugyanezt a meridiánrendszert ismerik a gömbön élők, mint sajátjukat. A délkörök számozása olyan, hogy egyenesen felénk néz a 0°-os meridián, balra és jobbra pedig a –90°-os (nyugati) és +90°-os (keleti) földrajzi hosszúságig terjed látásunk. A meridiánok a perspektíva, a vetítés miatt látszanak ellipsziseknek. A *b* kép azt a látványt tünteti fel, amelyet az *x*-tengely meghosszabbításában levő megfigyelő észlel, ha a gömb *v* sebességgel mozog. Amint arról előbb szó volt, most is gömböt látunk, de a csillag –37° és +143°-os meridiánjai által határolt részét. A látvány *a*-hoz képest torzított, a mértanilag szemben álló 0°-os meridián egészen oldalt van, a +90°-os nagyon jobbra és így tovább.

6. ábránk feltünteti, mit látunk a csillagból, ha állandó *v* sebességgel rohan el mellettünk. A szaggatott vonalú nyilak a távoli megfigyelő felé mutató irányt jelzik, a gömb *v* mozgási sebességéhez viszonyítva. A vonalkázott félellipszis a látható rész. Amikor az állócsillag még nagyon messze van, a felénk forduló alsó részét látjuk. Ha a megfigyelő felé mutató látósugár szöge 30°-os, akkor menetirányban nem látható az egész felénk forduló félellipszis, viszont a hátsó oldalon túllátunk a felszín egy darabjára. A 6. ábra baloldali körei azt tüntetik fel, hogy a csillagra rajzolt meridiánhálózat számozása szerint mit lát a megfigyelő. A 30°-ra elhelyezett megfigyelő a gömbön a nyugati hosszúság 102°-ától a keleti hosszúság 78°-áig fekvő városokat látja, holott egyszerű szerkesztés szerint –150°-tól +30°-ig terjedt volna a látható félgömb. Érdekes a 37°-ra elhelyezkedő megfigyelő esete, (37° = arc cos $\frac{v}{c}$ = arc cos 0,8). Ekkor pontosan a gömb mozgási irányra merőleges fele látható, (amint azt 90°-ra elhelyezkedő megfigyelő esetében vártuk volna a primitív elképzelés szerint). Még jobban félrebillen a látható félgömb 60°-os megfigyelési irány esetében. Amikor mellettünk rohan el a csillag (a megfigyelés szöge 90°), akkor azt látjuk, amiről előbb részletesen volt szó, (5. ábra *b* rajza). A csillag távozásakor mindez fordítva megy végbe, de az egész mozgás folyamán a csillag 2*r* átmérőjű gömbnek látszik. Pontosan ugyanez a látvány magától értetődően, ha a csillag áll és az űrhajós mozog *v* sebességgel.

A nézés, a megfigyelés más módszerei is lehetségesek. Ha radarral dolgozunk, belátható, az eredmény ugyanaz. J. Terrell bebizonyította, hogy stereoszkópos nézés, geometriai távolságméréssel kombinált megfigyelések ugyanezt az ismertetett eredményt szolgáltatják. Kissé módosul a látvány, ha a megfigyelő nincs nagyon messze a gömbtől, hanem véges közelségben helyezkedik el. De gyorsuló mozgás esetében a fénykép nagyon eltér a gömb alaktól. Erre vonatkozóan érdekes példákat számolhatunk végig.



6. ábra

Érdekesség kedvéért vizsgáljuk meg, mi volna, ha a természetben nem volna meg a távolságrövidülés, hanem a Galilei-transzformáció volna érvényben. Ekkor a mozgás irányába eső átmérőt $\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}$ arányban megnyúltnak látnánk, az űrhajós a csillagot a mozgás irányában megnyúlt forgási ellipszoidnak látná. 5. ábránk *c* rajza mutatja, milyen volna ebben a nem létező esetben a látvány $v = 0{,}8c$ esetében. A forgási ellipszoid sebesség irányában megnyúlt átmérője 1,28-szor volna nagyobb a tényleges átmérőnél. A meridiánhálózat –52°-tól +128°-ig volna látható, ugyancsak torzítva.

Mi történne állandóan nyitva tartott fényképezőgép esetében, ha a csillag csak egy pillanatra villanna fel? Először a *B*-ből érkező fénysugár hagyna nyomot (3. ábra), azután két oldalt érkeznének fényjelek a *BE* és *BE'* részekről, végül még az *E'D*, majd *DF* ívről. Előhívás után a mozgás irányába eső átmérő hossza a relativisztikus esetben $\frac{r}{\kappa}+y_0=r\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa^2}\right)$, a klasszikus esetben

$$r+y_0=r\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

volna, ($v = 0{,}8c$ esetében a számértékek 0,96*r* és 1,78*r*).

Az elmondottakból több irányban vonhatunk le tanulságokat. Látható, mennyire lényeges a fogalmakat meghatározó definíciók, a mérési eljárások pontos rögzítése. Hiszen ettől függ, a csillagot lapított ellipszoid, gömb stb. alakúnak észleljük-e. Félő, idővel e dolgozat tartalma a népszerűsítésben úgy bukkan majd fel, hogy: nem igaz a relativitáselmélet, nem igaz a Lorentz-transzformáció, nem észlelhető a relativisztikus távolságcsökkenés. A valóság az, hogy a speciális relativitáselmélet feltétlenül, változatlanul igaz. A Lorentz-transzformációs távolságcsökkenés észlelésére egyrészt megvan a hivatalos, eredeti eljárás, a vizsgált test egyidejű letapogatása. Másrészt az űrhajós éppen azáltal figyelheti majd meg a távolságzsugorodást, hogy a gömb alakú csillagot mozgása közben is gömbnek *látja*, nem pedig megnyúlt, görögdinnye formájúnak. Az elmondottak fő tanulsága tehát az, hogy a jelenről beszélünk, de mindig a múltat látjuk, méghozzá nagyon különböző időpontbeli múltakból összerakott mozaikot. És ez a mozaik nem feltétlenül azonos a jelen pillanat tényleges realitásával.

Megjelent a Fizikai Szemle 1961. XI. évfolyam 3. számában.