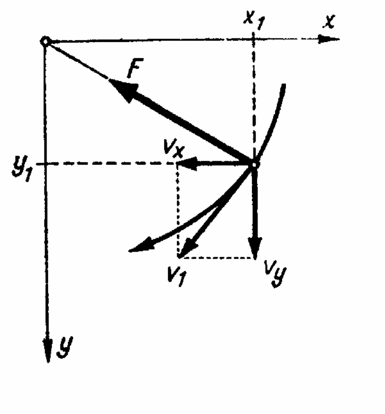
RUGALMAS FONALÚ INGA LENGÉSE*

VERMES MIKLÓS

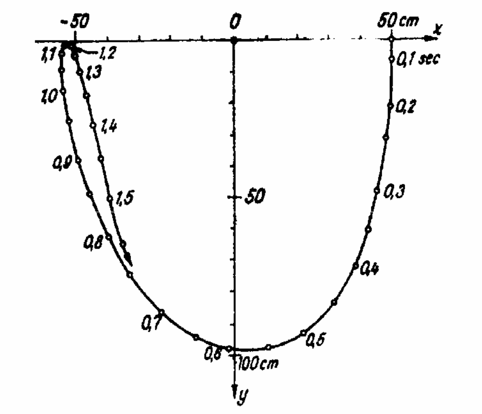
Az 1965. évi tanulmányi versennyel kapcsolatban egy mechanikai probléma vetődött fel. A bonyolult mozgásproblémát csak hosszadalmas numerikus számítással lehetett megközelíteni. A szükséges számításokat a MTA Számítástechnikai Központja Ural II. számítógépen végezte el és ezek a számítások érdekes pályagörbékre vezettek.

Az 1965. évi állami tanulmányi versenyen szerepelt ez a feladat: Felfüggesztett L hosszúságú rugóra kisméretű testet akasztunk. A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó ekkor nyújtatlan állapotban van) és innen elengedjük. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test a felfüggesztési pont alatt van? A tömegtelennek tekintett rugóra érvényes Hooke törvénye, amely szerint l megnyúlás egyenesen arányos L eredeti hosszal és F erővel: $l = eLF$; e megadott rugóállandó.

A feladat megoldása elemi úton nem lehetséges. A mozgást leíró differenciálegyenlet megoldása nem sikerült, ezért a mozgás lefolyása csak lépésenkénti numerikus számolással volt megismerhető. A számításokat a MTA Számítástechnikai Központja Ural II. számítógépen végezte el. A számítások menete a következő volt.



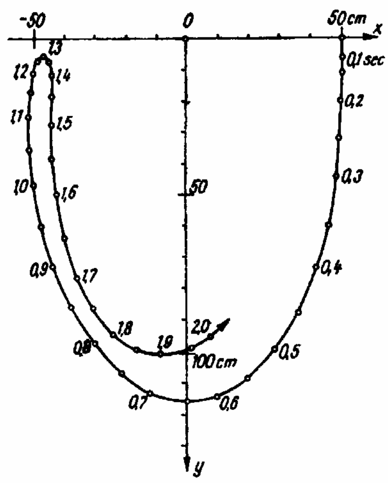
1. ábra. A számítás adatai



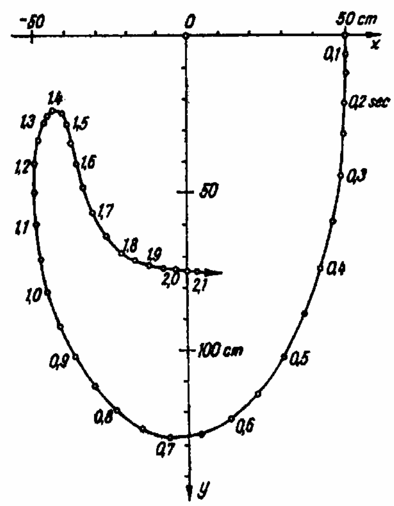
2. ábra. A pálya m = 34 gramm és x_0 = 50 cm esetében

Legyenek a mozgó m tömeg koordinátái t_1 pillanatban x_1 és y_1, sebességének összetevői v_{x1} és v_{y1} (az 1. ábra szerinti irányítással). Ebben az állapotban a fonál megnyúlása $l_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - L$, a nyújtó erő $F_1 = l_1/eL$. Ennek összetevői $F_1x_1/\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ és $F_1y_1/\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Ez utóbbi levonandó mg súlyerőből. Az erő x és y irányú összetevőit elosztva m tömeggel megkapjuk a gyorsulás a_{x1} és a_{y1} összetevőit. Amennyiben Δt időköz elég rövid, a mechanika alaptörvényei szerint Δt idő múlva a sebesség összetevői $v_{x2} = v_{x1} + a_{x1}\Delta t$ és $v_{y2} = v_{y1} + a_{y1}\Delta t$, az új koordináták $x_2 = x_1 + v_{x1}\Delta t + a_{x1}\Delta t^2/2$ és $y_2 = y_1 + v_{y1}\Delta t + a_{y1}\Delta t^2/2$. Így az 1. állapot adataiból közelítő számítással kaptuk meg a 2. állapot adatait, amelyek ezután alapul szolgálnak a következő lépés elvégzéséhez.

A példaként szereplő rugalmas fonalú inga eredeti hossza L = 50 cm, rugóállandója e = 10^{-5} din^{-1}. Első állapotként az indítás $x_0 = L$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 0$ adatai szerepeltek. Az időköz Δt = 0,01 sec volt, amellyel az Ural II. számítógép több száz lépést számított végig. Az egyes adatok 9 számjegy pontosságúak voltak; természetesen rajzaink elkészítésekor elegendő volt az adatokat 3 számjegyig figyelembe venni és a mozgó tömeg helyét 0,05 sec-onként felrajzolni. A számítógép 9 számjegyes pontossága a közelítésből eredő hibák továbbszármaztatása ellen nyújtott valamelyes biztonságot. A pályagörbék alakja jól egyezik a rendes, numerikus számolással kapott eredményekkel (Fizikai Szemle 1966. 1. 26).

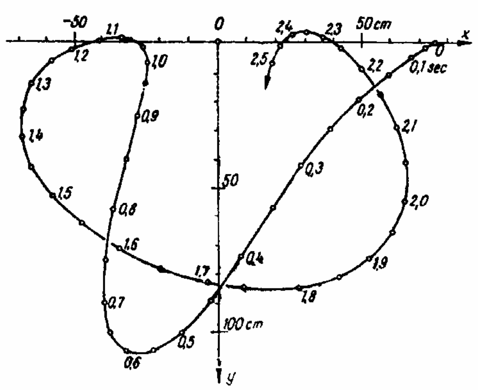


3. ábra. A pálya m = 68 gramm
és x_0 = 50 cm esetében

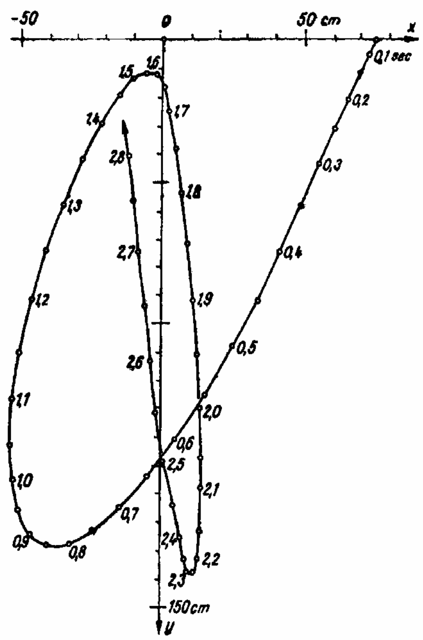


4. ábra. A pálya m = 102 gramm
és x_0 = 50 cm esetében

Az eredményül kapott görbék ellenőrzése az energiamegmaradás törvényével azt mutatta, hogy rendszeres hibák adódnak tovább. Ezért egy második sorozatban a számítógép programozása olyan volt, hogy az intervallum végén érvényes sebességösszetevőket használta fel: $x_2 = x_1 + v_{x2}\Delta t + a_{x1}\Delta t^2/2$ és $y_2 = y_1 + v_{y2}\Delta t + a_{y1}\Delta t^2/2$. Így viszont



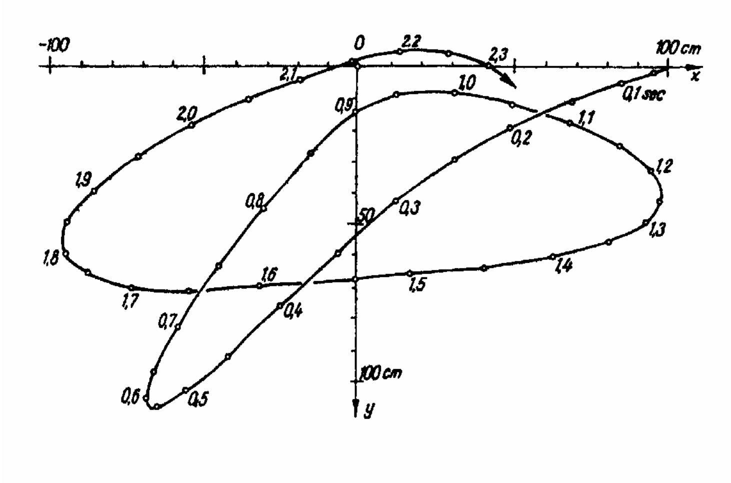
5. ábra. A pálya *m* = 34 gramm
és x_0 = 75 cm esetében



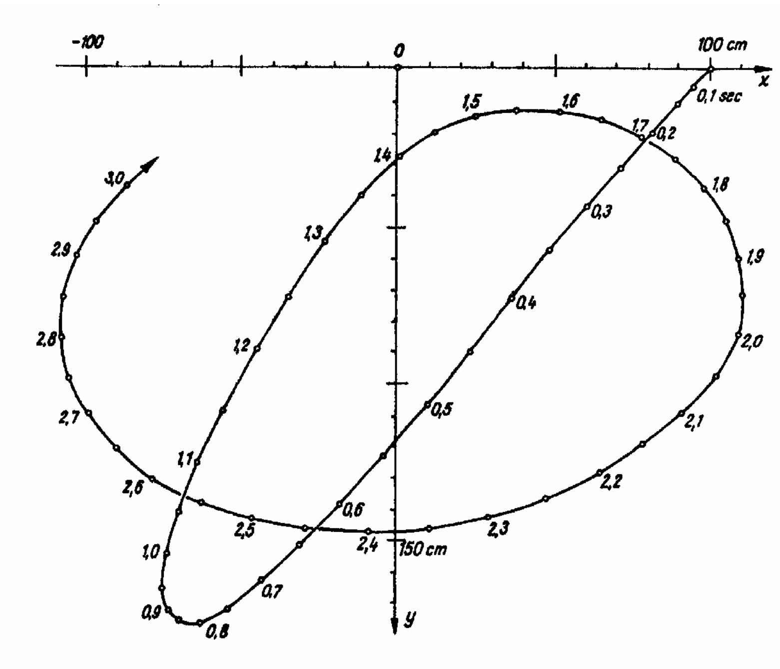
6. ábra. A pálya *m* = 102 gramm
és x_0 = 75 cm esetében

ellentétes irányú hibák keletkeztek, ezért minden esetben mindkét módon végigszámoltuk a pályát és a koordináták számtani középértékeit vettük. Amint az alábbi példa mutatja, így az energiamegmaradás törvénye tűrhető pontossággal igazolja a számítás eredményeit.

Az első három végigszámított esetben a tömeg a feladat szövege szerint nyújtatlan fonállal indult, vagyis t = 0-kor x_0 = 50 cm, y_0 = 0 cm. Ha a tömeg m = 34 gramm, a létrejövő mozgás pályáját a 2. ábra tünteti fel. A függőleges helyzeten való áthaladáskor a fonál szinte kétszeresére nyúlik, azután a tömeg majdnem kezdeti magasságáig emelkedik fel, majd hurkolt pályával esik vissza. Érdekes, hogy a lengésidő kb. 2,4 sec, holott a 100 cm hosszú fonálinga lengésideje kb. csak 2 sec, az 50 cm-es ingáé pedig 1,4 sec.



7. ábra. A pálya m = 34 gramm és x_0 = 100 cm esetében



8. ábra. A pálya m = 102 gramm és x_0 = 100 cm esetében

A görbe realitását az energiatörvénnyel vizsgálhatjuk meg. t = 1,2 sec-kor a tömeg mélysége az indulási helyzethez képest 0,738 cm, tehát a nehézségi erő munkavégzése mgh = $2{,}46 \cdot 10^4$ erg. Ezt a munkavégzést mint a rugalmas és a mozgási energia összegét kell megtalálnunk. Ebben a baloldali szélső helyzetben a fonál hossza 52,31 cm, a megnyúlás 2,31 cm, a rugalmas erő 4600 din és a rugalmas energia $0,53 \cdot 10^4$ erg. A sebesség 0,01 sec-os időközből számítva 44 cm/sec és a mozgási energia $3,30 \cdot 10^4$ erg. A két energia összege $3,83 \cdot 10^4$ erg, eltérése a $2,46 \cdot 10^4$ erg munkavégzéstől $1,37 \cdot 10^4$ erg, ami a mozgás közben előforduló $3,4 \cdot 10^6$ erg maximális energiához képest nem lényeges. Ez mutatja, hogy az alkalmazott számítógépes eljárás elfogadható pályagörbét ad eredményül.

A 3. és 4. ábra szintén abban az esetben mutatja a mozgás pályáját, ha az indítás nyújtatlan fonállal történt, de a tömegek különböztek. A 3. ábra 68 grammos, a 4. ábra 102 grammos tömegre érvényes. Várható módon nagyobb tömeg mélyebbre jut le és a visszatérő hurok szélesedik, a lengésidő hosszabbodik.

Az alkalmazott eljárás a feladat eredeti kérdésén túlmenően lehetővé tette a pályagörbék megkeresését abban az esetben is, ha az indítás nyújtott fonállal történik. Az 5. ábra esetében a 34 grammos tömeget x_0 = 75 cm-es távolságból indítjuk, mintegy belőjük. A keletkező pálya megértéséhez nem szabad elfelejtenünk, hogy 50 cm-nél rövidebb fonálhossz esetében a programozás úgy működik, mintha a rugalmas fonál összenyomásához ugyanakkora, de ellentétes irányú erő lenne szükséges, mint nyújtásához. A valóságban a vékony fonál kihajlása folytán az összenyomáshoz nem szükséges lényegesebb erő. Ha a tömeg 102 grammos, akkor a 6. ábra szerinti pálya keletkezik. Ezekben az esetekben a mozgás már nem emlékeztet ingalengésre. Még távolabbról, x_0 = 100 cm-ről indítva a 34 grammos, illetve a 102 grammos tömeget, a 7. és 8. ábrákon látható pályák keletkeznek. Ilyenkor a pályák még kevésbé emlékeztetnek ingalengésre, a tömeg inkább oldalt vágódik ki és nem megy annyira mélyre.

A MTA Számítástechnikai Központja Ural II. számítógépen végezte el a pályaszámításokat. *Szelezsán János*nak és *Varga Gabriellá*nak munkájukért köszönettel tartozom.

*Érkezett l967. jan.l0.

Különlenyomat. MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT, XV. kötet, 4. füzet, Budapest, 1967.