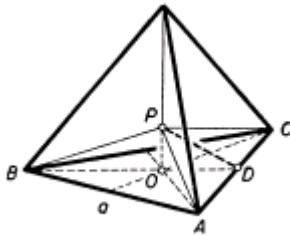


## Szappanhártyák minimálfelületei

Ismeretes, hogy a folyadék felszíne rugalmas hártyához hasonlóan viselkedik, és lehetőség szerint minél kisebb felületre húzódik össze. Ha drótból mint élekből mértani testek mintáit készítjük el, és ezeket szappanoldatba mártjuk, akkor a drótváz kiemelése után érdekes alakzatokat figyelhetünk meg. Például a négy szabályos háromszögből álló tetraéder esetében a szappanhártya nem a négy oldallapot borítja be, hanem hat egyenlőszárú

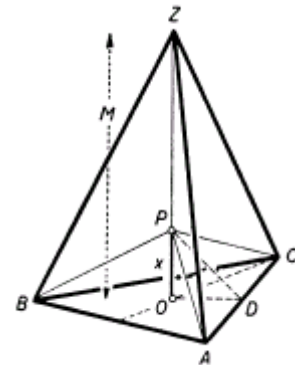


1. ábra

háromszöget alkot, amelyek alapja a tetraéder 1-1 éle, és amelyek a tetraéder súlypontjában találkoznak (1. ábra). Ha a tetraéder alapéle  $a$ , akkor egy lapjának területe  $a^2\sqrt{3}/4$ , négy lapból álló teljes felszíne pedig  $a^2\sqrt{3} = 1,732a^2$ . A tetraéder térbeli magassága  $a\sqrt{2/3}$ , és a súlypont ennek negyedében van, ezért  $P$  találkozási pont magassága az alaplap felett  $PO = a\sqrt{2/3} : 4 = a/\sqrt{24}$ . Az  $ACP$  egyenlőszárú háromszög magassága  $DP = \sqrt{OP^2 + OD^2}$ ; mivel  $OD$  az alaplap magasságának harmada,  $OD = a\sqrt{3}/6$ , ezért  $DP = a/\sqrt{8}$  és 1 egyenlőszárú háromszög területe

$a^2\sqrt{2}/8$ . Tehát a 6 egyenlőszárú háromszögből álló szappanhártya teljes felszíne  $3/4 \sqrt{2} \cdot a^2 = 1,061a^2$ , ami valóban kisebb, mint a tetraéder felszíne, amely  $a^2\sqrt{3}$ . Ilyen kérdésekkel való foglalkozást tűzött ki Lapunk egyik pályázatában, melynek eredménye ebben a számban olvasható. Lássunk néhány érdekes esetet a szappanhártyából képződő minimálfelületek köréből.

Foglalkozzunk a szabályos háromszög alapú egyenes gúlával (2. ábra), melynek alapéle  $a$ , és térbeli magassága  $OZ = M$ . E gúlák speciális esete a tetraéder, amikor  $M = a\sqrt{2/3}$ . Most a szappanhártya 3 darab, ferde síkban elhelyezkedő egyenlőszárú háromszöget ( $ACP, CBP, BAP$ ) és 3 függőleges síkú általános háromszöget ( $PCZ, PBZ, PAZ$ ) alkot, amelyek  $P$  pontban találkoznak. Független változónak  $P$  pont  $OP = x$  magasságát választjuk, és azt vizsgáljuk, adott gúlában miként változik a szappanhártya teljes felszíne, mint  $x$  függvénye.



2. ábra

Először vizsgáljuk egy függőleges és egy ferde síkú háromszög területének összegét, vagyis például  $PCZ + ACP$  területet. A függőleges háromszög területe két háromszög területének különbségeként állítható elő:  $PCZ = OCZ - OCP = OC \cdot M/2 - OC \cdot x/2$ , mert mindegyik háromszög magassága  $OC = a\sqrt{3}/3$ , és az egyiknek  $M$ , a másiknak  $x$  az alapja. Hozzáadjuk  $ACP$  háromszög területét, amely

$$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2},$$

szorzunk 3-mal, és megkaptuk a szappanhártya teljes felszínét:

$$F = \frac{3a}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot M. \quad (1)$$

Kérdés, adott  $a$  és  $M$  méretekkel bíró gúla esetében  $x$  mely értéke mellett lesz ez a felszín a lehető legkisebb?

Mielőtt a minimum kereséséhez hozzáfognánk, nézzük meg az (1) alatti függvényt, és vegyük észre, hogy a gúla  $M$  magassága és  $P$  pont  $x$  magassága külön tagokban fordul elő. Ez azt jelenti, hogy  $x$  azon értéke, amely mellett  $F$  felszín a legkisebb, nem függ a gúla magasságától. Ez mértanilag is könnyen belátható. Az (1) képletben az első két tag az  $ACP$  és  $OCP$  háromszögek különbsége, és ez csak  $P$  pont  $x$  magasságától függ, nem pedig az egész gúla  $M$  magasságától. Ettől csak a harmadik tagban szereplő háromszög területe függ, amely viszont  $x$ -től független. Tehát akármilyen magas a gúla, a szappanhártya alsó 3 háromszöge ugyanazon magasságban levő  $P$  pontban találkozik. Ezt több pályázó észre is vette (Vincze Imre, Szaszovszky Géza és Török Ádám).

Ezután keressük  $x$  azon értékét, amely mellett az (1) szerinti hártafelszín a legkisebb. Többféleképp kereshetjük. A differenciálszámítás könnyű, automatikus eljárást ad meg a szélsőérték megkeresésére. Ha elemi eljárást kívánunk használni, megfelelő mesterkedésekkel ugyancsak megtalálhatjuk az (1) függvény szélső értékét (lásd Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása című könyvben a 147. oldalon). Azonban most a legegyszerűbb a következő út. A gúlak sorozatába beletartozik a tetraéder is, amelyről már tudjuk, hogy a felszín minimuma  $x = a/\sqrt{24}$ -nél következik be. Minthogy a minimum feltétele nem függ  $M$  magasságtól, ez az érték mindegyik gúlára érvényes, a három alsó, egyenlőszárú háromszög ugyanolyan marad, akármilyen magas a gúla. (Kivétel, ha  $M$  kisebb, mint  $a/\sqrt{24}$ , ekkor a szappanhártya a 3 felső oldallapot vonja be; például Szaszovszky és Török figyelték meg ezt.)

Azt hihetnénk, most már gépies eljárás van birtokunkban, amellyel minden drótkeret-váz esetében meg tudjuk állapítani, milyen hártafelszín alakul ki; tudniillik a legkisebb felszínű. Pedig a fejtörés csak most kezdődik! Mi tudjuk, hogy a legkisebb felszínnek kell megvalósulnia, de hogyan csinálja ezt a szappanlél? Matematikust tart, akt előre kiszámítja, melyik felszínalakzat a legkisebb területű, és a lé azután megvalósítja ezt? Biztosan nem így történik, hanem a drótkeret kiemelése közben a felületi feszültségből származó erők irányítják a felszín alakulását, és végül ennek az eredményét észleljük. De biztos az, hogy ily módon ugyanaz az alakzat jön létre, amelynél a felszín minimális? A tetraéder példáján tisztázzuk ezt a kérdést.

A felületi feszültségből származó erő a kerületre merőlegesen, a felület síkjában befelé húz. Ebből következik, hogy ha egy élben 3 sík hártafelület találkozik, ezek feltétlenül  $120^\circ$ -



3. ábra

os lapszöget alkotnak (3. ábra). Csak így jöhet létre a három, felületekben húzó erők egyensúlya. A  $120^\circ$ -os lapszög követelménye független a felületek alakjától, nagyságától, mert a felületi feszültség is független ezektől. Eszerint egy új alaptételünk van: három hártafelület lapszögének  $120^\circ$ – $120^\circ$  nagyságúnak kell lennie. Amikor a drótvázat kihúzzuk a szappanoldatból, a felületi feszültségből származó erők úgy vezetnek a síkok elhelyezkedését,

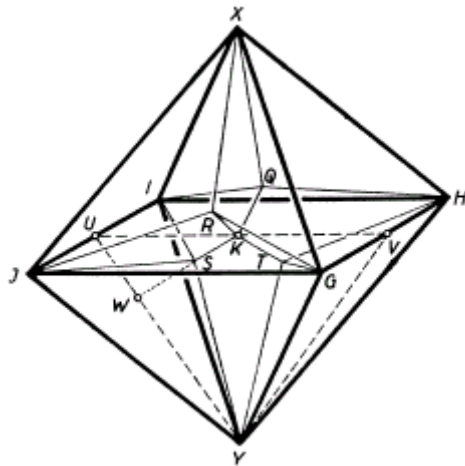
hogy ez a lapszögtörvény teljesüljön. Nézzünk rá tetraéderünkre például  $M$  térbeli magasság folytatásának irányából: belátható, hogy a hártafelületek valóban  $120^\circ$ -os lapszögek szerint helyezkednek el, -- és ugyanez érvényes mindegyik térbeli magasság körül. Tehát a tetraédernél egyszerre teljesül a minimális felszín és a  $120^\circ$ -os lapszög követelménye.

*Néhány kiegészítő megjegyzés:* A közismert karika-fonál kísérletnél is könnyen érthető, hogy a terület-feltétel és erő-feltétel egyeztetésére teljesül. (4. ábra.) A fonál egyik oldalán feszülő szappanhártya körív alakúra húzza be a fonalat, mert ekkor legkisebb a felszín. Ugyanakkor a fonál mentén más és más irányban hatnak a felületi feszültségből származó erők, ezért belőlük a fonál hossza mentén a fonalat feszítő erő származik, amelynek nagysága az ív görbületétől függ. Minthogy a körív görbülete mindenütt ugyanaz, a fonál hosszában



4. ábra

fellépő feszítőerő is ugyanaz a fonál minden pontjában, ami az egyensúly feltételé. Ha a körív alakja módosulna egyrészt megnövekedne a felszín, másrészt megbomlana a fonál mentén az egyensúly a fonál eltérő görbületei következtében. Egyes mértani testeknél az is várható, hogy más és más helyzetben emelve ki a drótvázat az oldatból, más formájú lesz a hártyaalakzat, mert másképp fognak hozzá az erők a felszínek egyensúlyi helyzetének kialakításához. (Szaszovszky és Török figyeltek meg ilyet.) A háromoldalú gúlához hasonlóan a négyzet-, ötszög-stb. alapú gúlánál is végezhetünk számítást (lásd az ebben a számban kitűzött feladatokat).



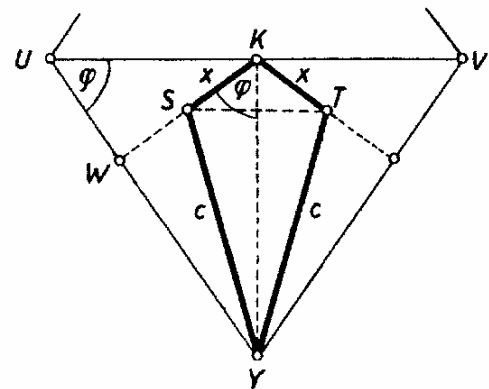
5. ábra

Még megvizsgálunk egy-két alakzatot, közöttük elsőnek az oktaédert (5. ábra). Az oktaéder szappanoldatból kiemelt drótvázára igen érdekes hártya feszül: a középpontból a csúcsokhoz egy-egy deltoidlap indul, a deltoid hosszabb éle és az oktaéder oldalélei között 3-3 egyenlőszárú háromszög helyezkedik el. Az idom megértése eléggé próbára teszi a térszemléletet. Legjobb abból kiindulni, hogy az oktaéder  $K$  középpontjából az oktaéder minden második oldalára felé merőleges egyenes indul; ennek  $KS = x$  hosszát fogjuk független változónak tekinteni. Ez a négy, egyenként  $x$  hosszúságú távolság úgy helyezkedik el a középpont körül, mint a szénatom négy vegyértéke az atommag körül, vagyis mint egy tetraéder középpontjából a csúcsok felé húzott egyenesek. E 4 darab  $x$  hosszúságú távolság  $Q, R, S, T$  végpontjait egyenesekkel kötjük össze a legközelebbi három oktaédercsúcsponttal. Így 6 deltoid keletkezik ( $KSYT, KTHQ, KQXR$  stb.), amelyek közül két-két szembenfekvő síkja merőleges egymásra. A deltoidok  $c$  hosszúságú hosszabb oldalai (például  $SY = c$ ) az oktaéder éleivel egyenlőszárú háromszögeket alkotnak ( $SJY, SIJ, SIY$  stb.). Az oktaéder mindegyik éle felé vezet egy ilyen egyenlőszárú háromszög. Ha az alakzatra az oktaéder egyik lapja felől tekintünk rá, akkor kétféle látványban lehet részünk. Négy lap (például  $JGX$ ) felől rátekintve három egyenlőszárú háromszögből álló bemélyedést látunk, a másik négy lap (például  $GHX$ ) felől rátekintve egy mély üreget látunk, amelyet felváltva határol 3 egyenlőszárú háromszög és 3 deltoid.

Keressük, hogy  $x$  mekkora értéke mellett lesz az oktaéderben kialakuló hártya felszín területe a lehető legkisebb. Ragadjuk ki az oktaéder függőleges síkmetszetének alsó felét,  $UYV$ -t (6. ábra). Ebben benne fekszik a  $KSYT$  deltoid. Ennek  $x$  oldala ugyanazt a  $\varphi$  szöveget zárja, be a  $KY$  tengellyel, mint amekkora két szomszédos oktaéderlap lapszögének a fele, például  $YUK <$ ). Erről a szögről ismeretes, illetve könnyen kiszámítható, hogy  $\sin \varphi = \sqrt{2/3}$ , és  $\cos \varphi = 1/\sqrt{3}$ , mert  $KY = a\sqrt{2}/2$ , és  $UK = a/2$ . A deltoid területe

$$0,5 \cdot KY \cdot ST = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot x \cdot \sin \varphi = \frac{ax}{\sqrt{3}}.$$

A deltoid hosszabb oldala



6. ábra

$$c = SY = \sqrt{x^2 \sin^2 \varphi + (KY - x \cos \varphi)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot ax + x^2}.$$

Áttérve az egyenlőszárú háromszögre, melynek alapja  $a$  és szára  $c$ , e háromszög magasságára Pythagoras-tétellel a

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot ax + x^2}$$

eredményt kapjuk, területe pedig

$$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot ax + x^2}.$$

Az oktaéderben kialakuló teljes hártafelszín 6 deltoidból és 12 háromszögből áll, vagyis

$$F = 2\sqrt{3} \cdot ax + 6a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot ax + x^2}. \quad (2)$$

Ennek minimumát úgy találjuk meg, hogy 4-gyel osztjuk, és alkalmazzuk ezt a helyettesítést:  $x = -\zeta + a/\sqrt{6}$ . Ennek elvégzésével:

$$\frac{F}{4} = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \zeta + \frac{3a}{2} \cdot \sqrt{\zeta^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

Ennek a változó része megegyezik (1) változó részével, tehát szélsőértéke is ugyanakkor van, vagyis, ha  $\zeta = \frac{a}{\sqrt{24}}$ , de akkor  $x = -\frac{a}{\sqrt{24}} + \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{24}}$ . Tehát az oktaéderben keletkező

hártya minimumának feltétele, hogy  $x = SK = \frac{a}{\sqrt{24}}$  legyen. Mivel

$$WK = \frac{a}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{24}},$$

tehát  $S$ -pontnak,  $x$  végpontjának az oktaéderlap középpontjától való távolsága a középpont és az oktaéderlap távolságának felében van, így  $WS = x = \frac{a}{\sqrt{24}}$ . Ez igen nagy eredmény: azt,

jelenti, hogy idomunk három egyenlőszárú háromszöge ugyanolyan alakú, ahogyan azt a tetraédernél és a szabályos háromszögalapú gúla alaplapjánál megismertük. Ebből következik, hogy minden lapszög  $120^\circ$ -os, és a felületminimum feltétele ugyanarra vezet, mint az erőegyensúly feltétele.

Az oktaéderben keletkező hártafelszín nagyságát a minimum esetében megkapjuk, ha  $x = a/\sqrt{24}$ -et helyettesítünk (2)-be; az eredmény  $2\sqrt{2} a^2$ . Az oktaéder 8 lapjának teljes felszíne  $2\sqrt{3} a^2$ , ami az előbbinél nagyobb. A pályázók közül Jánossy András, Jánossy István, Kulin György és Lipcsey Zsolt munkaközössége helyesen ismeri fel, hogy a kisebb deltoidátló hossza az oldalél harmadrésze (amint az előbbi  $x$ -értékünkkel azonnal következik).

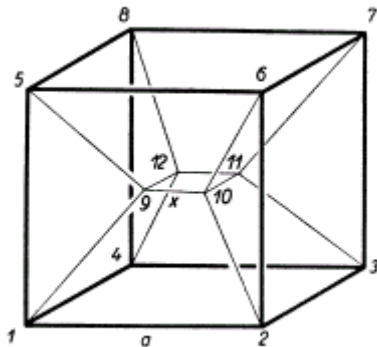
Következik a kocka esete. Itt középen kis négyzet alakul ki, amelyhez 8 trapéz csatlakozik (például, 1, 2, 10, 9) és ezek közé függőlegesen 4 egyenlőszárú háromszög áll be (például 2, 6, 10). Válasszuk független változónak a kis négyzet oldalhosszúságát (7. ábra).

Ekkor a trapézok magassága  $\sqrt{\left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ , a háromszögek magassága  $\frac{a-x}{2} \cdot \sqrt{2}$ , és a

hártya teljes felszíne

$$F = x^2 + 2(a+x) \cdot \sqrt{2a^2 - 2ax + x^2} + \sqrt{2} \cdot a(a-x). \quad (3)$$

A szélsőérték keresése harmadfokú egyenletre vezet. Ha  $F$ -et mint  $x$  függvényét grafikusán ábrázoljuk, a rajzban  $x = 0,073a$ -nál jelentkezik egy gyenge minimum. Ekkor a felszín  $4,24253a^2$  volna. Ezt a minimumot találta grafikus ábrázolással a Jánossy-féle munkacsoport. Ha a  $120^\circ$ -os lapszögek törvénye alapján indulunk el, arra az eredményre jutunk, hogy a kis



7. ábra

négyzet sarkából kiinduló él mentén akkor találkozik a három sík (2 trapéz és 1 háromszög)  $120^\circ$ -os lapszögekkel, ha a kis négyzet élhosszája nulla, vagyis ha nincs középen négyzet, és az egész felszín 12 háromszöggé egyszerűsödik. Ilyenkor a hártafelszín  $4,24266a^2$ , vagyis egy kicsit több, mint előbb. Eszerint a kockánál nem teljesülhet egyszerre a legkisebb felszín és az erőegyensúly feltétele. És mit csinál a szappanhártya? A felsorolt két eset közül egyiket sem választja. A kis négyzet kialakul, de élhossza 5 pályamunka egybehangzó adatai szerint  $0,2a$  és  $0,3a$  között van. Hogyan lehet ez? Minden valószínűség szerint az élek és felületek kis mértékben görbültek és olyan alakzat keletkezik, amelynél egyszerre teljesül mindkét

törvény. Érdekes az I. István gimnázium fizikai szakkörének megfigyelése: ha a kockában drótból megvan egy testátló, akkor a 12 háromszögből álló felszín jön létre.

Ez a probléma vezet utolsó példánkhoz, amely görbült minimálfelület. Két párhuzamos drótkarikából álló szerkezetet mártunk szappanlébe, az idomot kiemeljük a folyadékból, és a középen keletkező körlapot átszúrjuk, hogy csak a palást mentén maradjon hártya. Görbe felszín alakul ki a két drótkarika között, úgynevezett *katenoid*. Ilyen felszínt kapunk, ha egy láncgörbét forgatunk az  $x$ -tengely körül. Bebizonyítható, hogy ez a felszín kisebb, mint a hengerpalást felszíne. Bár egyenes alkotók helyett görbékkel rendelkezik, de a felület a középsík felé közelebb húzódik a tengelyhez, és így adódik, hogy a görbült felület területe kisebb, mint a hengerpalásté. És mi van az erők egyensúlyával? Görbült hártjánál a felületi feszültségek eredője a homorú oldal felé irányuló nyomást hoz létre. A mi esetünkben mi egyensúlyozza ki ezt a nyomást? Az az érdekes körülmény áll fenn, hogy mindkét oldalon egyenlő légnyomás mellett csak olyan görbült hártya létezhet, amelynek két egymásra merőleges metszete közül a felszín az egyikben domború, a másikban homorú. Ilyen furcsa alakzat a mi felületünk is. Oldalmetszetben vizsgálva a felszín kívülről nézve homorú. De nézzük felülről a felszín ugyanezen pontját: azt látjuk, hogy ez a pont egy köralakú felületmetszeten fekszik, és most belülről látszik homorúnak a felszín ugyanazon pontja. A kétirányú görbültségből származó nyomások ellentétesek, és kiegyenlítik egymást, mert a kétirányú görbültség abszolút értékben megegyezik. Így alakul ki a két drótkarika között a láncgörbe-forgásfelület, amely a legkisebb felszín, és egyszerre mind eleget tesz az erőegyensúly feltételének is. Ha a középen eredetileg kialakuló körlapot nem távolítjuk el átszúrással, két, egymással szögben találkozó görbült felület jön létre.

Ez a vázlatos áttekintés mutatja, hogy a szappanhártyákról szóló pályázat milyen érdekes problémákat érintett. Valószínű, hogy a pályázat lezárása ez esetben olvasóink körében nem a munka végét, hanem újabb érdekesítő kutatások kezdetét jelenti.

### A szappanhártyák minimálfelületeiről szóló pályázat eredménye

A pályázat szép eredménnyel zárult: 7 dolgozat érkezett be és mindegyikről megállapítható, hogy a szerzők nagy érdeklődéssel, szorgalommal dolgoztak, élvezték felfedezéseik örömét. A beküldött munkákat szép fényképek, rajzok, grafikonok gazdagították.

I. helyezést és 200 Ft jutalmat nyert *Vincze Imre* dolgozata (Budapest XVIII., Hengersor u. gimnázium). Magas elméleti bevezetés után kísérleti berendezését ismerteti. Az idomok élhosszúságait leginkább kivetítve mérte. Igen sok mérést végzett háromszög- és négyszögalapú gúlánál, hasáboknál, valamennyi szabályos testnél

és két körnél. A szélsőérték kialakulását legtöbbször matematikailag is vizsgálta. Felismeri a háromszögalapú gúlák szabályát. A dolgozat igen terjedelmes és gondos munka. Talán nagyobb mértékben hajszolta a mérések pontosságát, mint ahogyan az adott esetben reális volt.

II. helyezést és 100-100 Ft jutalmat nyert két pályamunka.

*Jánossy András, Jánossy István, Kulin György és Lipcsey Zsolt* (Budapest, I., Petőfi gimnázium) munkaközössége helyes fizikai érzéssel a lényeges problémák felé fordult, és a viszonylag rövid dolgozatban több értékes eredményt ért el. A tetraéder esetét matematikailag tárgyalták. Az oktaédernél és kockánál grafikus módszerrel keresték a minimum feltételét, és felismerték a kocka mért adatánál mutatkozó ellentmondást.

*Szaszovszky Géza és Török Ádám* (Budapesti Piarista Gimnázium) 10 fényképpel illusztrált dolgozatukban felismerik a háromszögalapú gúlákra érvényes szabályt, jó megállapításokat tesznek a kockáról, ötszög, hatszög alapú hasábokról. Vizsgáltak görbült felületeket is. Dolgozatuk felfedezéseikről írt élvezetes élménybeszámoló.

Dicséretet és jutalomkönyvet kapott a *budapesti I. István gimnázium fizikai szakkörének* dolgozata. 16 igen szép fényképpel ellátott dolgozatukban helyes megállapításokat tesznek a tetraéderről, háromszög alapú hasábról, kockáról, oktaéderről stb.

*Földeáky Mária* (Budapest, VIII. Ságvári Endre Gimnázium) munkájában a kockával, tetraéderrel, oktaéderrel stb. foglalkozik, és érdekes átmeneti alakzatokat ír le.

*Hoppál Katalin és Szenkovszky Adrienne* (Nagykanizsa, Landler Jenő gimnázium) a tetraéderrel és oktaéderrel foglalkoznak. Mérés alapján helyesen rögzítik az oktaéderben keletkező idom méreteit.

*Gyovai Erzsébet és Kerekes Irén* (Makó) dolgozatukban a tetraéderrel és kockával foglalkoznak, eredményeiket rajzban is feltüntetik.

Megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok XXIV. kötet 1–2. számában, (1962. évi 1–2. szám)