

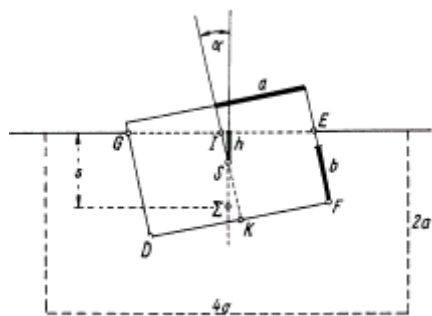
HASÁBOK STABILIS ÚSZÁSA*

VERMES MIKLÓS

Archimedes törvénye megszabja, hogy egy szilárd test úszáskor térfogatának milyen hányadával merül a folyadékba, de nem adja meg, hogy milyen helyzetben úszik. Köztudomású, hogy egy lapos lemez úszáskor nagyfelületű lapjával vízszintesen helyezkedik el. Ezért meglepő, hogy az alábbi számítások bizonyítéka szerint olyan stabilis úszási helyzet is lehetséges, amikor az úszó hasáb nagyobb felületű lapja függőlegesen helyeztű.

Az úszási helyzetek stabilitását a metacentrum elhelyezkedése alapján szokták megítélni. Most egy más eljárást követünk: a folyadék és az úszó test együttes súlypontjának legmélyebb helyzetét keressük.

Igen hosszú, d_1 sűrűségű folyadékban téglalap keresztmetszetű, d_2 sűrűségű, igen hosszú hasáb úszik (1. ábra). A téglalap vízszintes oldala $2a$, függőleges oldala $2b$ hosszúságú. Legyen minden esetben $a \geq b$. Úszáskor a téglalast súlypontja (S) h mélységben van a felszín alatt.



1. ábra.

A használt jelölések feltüntetése

A folyadékból kihasítunk vízszintesen $4a$, függőlegesen $2a$ méretű, téglalap keresztmetszetű részt, amelynek tengelye párhuzamos az úszó hasáb tengelyével és vele egyező hosszúságú. Ennek a folyadék résznek a rajta úszó hasábbal együtt Σ az együttes súlypontja, amely s mélységben van a folyadék felszíne alatt. Az úszó hasábot gondolatban α szöggel forgatjuk el a vízszintesen, a rajz síkjára merőlegesen fekvő igen hosszú tengelye körül úgy, hogy úszó állapotban maradjon és megvizsgáljuk, miként függ Σ közös súlypontjuk s mélysége az α elfordítási szögtől. Ennek a függvénynek a

vizsgálata ad feleletet a stabilitás kérdésére.

Először az úszó hasáb S súlypontjának a felszín alatti mélységét kell kiszámítani. A hasáb súlyát egyenlővé tesszük a kiszorított folyadék súlyával:

$$2a \cdot 2b \cdot d_2 = a(GD + EF) \cdot d_1 = 2 \cdot IK \cdot a \cdot d_1 = 2a(b + h/\cos\alpha) \cdot d_1.$$

Innen a hasáb súlypontjának mélysége:

$$h = \left(2 \frac{d_2}{d_1} - 1 \right) \cdot b \cos\alpha. \quad (1)$$

Ha a hasábot mindig nagyobb szöggel billentjük el, baloldali felső éle egy bizonyos α_1 szög esetében a folyadék felszínére kerül. Ennek feltétele:

$$h + a \sin\alpha = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Ebből (1) figyelembe vételével következik a hasáb helyzetének első határszöge:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2b}{a} \left(1 - \frac{d_2}{d_1} \right). \quad (2)$$

α további növelésekor (2. ábra) csak a hasáb felső éle emelkedik ki a folyadékból és az új helyzetnek megfelelően új számítást kell végezni. Ebben az esetben az úszás törvényéből levezethető, hogy:

$$h = a \sin\alpha + b \cos\alpha - 2\sqrt{ab(1 - d_2/d_1)\sin 2\alpha}. \quad (3)$$

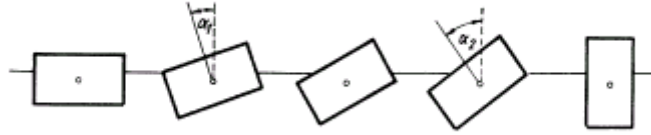
Egy további határhelyzetben a jobboldali alsó él érinti a felszínt:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{b}{2a(1 - d_2/d_1)}. \quad (4)$$

Ettől kezdődően $\alpha = 90^\circ$ -ig a hasáb súlypontjának mélységét (1)-hez hasonlóan a

$$h = \left(2 \frac{d_2}{d_1} - 1\right) a \sin \alpha \quad (5)$$

képlet adja meg.



2. ábra. Különböző úszási helyzetek

A stabilitás kérdésre az s együttes súlypontmélység viselkedése adja meg a feleletet. s meghatározása céljából a nyomatékok tételével egyesíteni kell az úszó hasáb és a figyelembe vett térfogatrészben levő folyadék súlypontját. Az elemi, de hosszadalmas számítások eredménye:

$\alpha = 0^\circ$ és α_1 között:

$$s = a - \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \frac{d^2}{a} \cos \alpha - \frac{a}{24} \cdot \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha, \quad (6)$$

α_1 és α_2 között:

$$s = a - \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \frac{b}{2a} \cdot (a \sin \alpha + b \cos \alpha) + \frac{2b}{3a} \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) \sqrt{ab \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) \sin 2\alpha}, \quad (7)$$

α_2 és $\alpha = 90^\circ$ között:

$$s = a - \frac{1}{2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) b \sin \alpha - \frac{b^3}{24a^2} \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha. \quad (8)$$

Mindezek a képletek akkor érvényesek, ha $d_2/d_1 > 0,5$. Ha $d_2/d_1 < 0,5$, akkor valamennyi képletünkben d_2/d_1 helyébe $1 - d_2/d_1$ teendő.

Képleteink sokkal áttekinthetőbbek, ha minden hosszúságot a -val mérünk és a következő viszonzyszámokat használjuk:

$$\frac{b}{a} = \xi, \quad \frac{s}{a} = \sigma, \quad \frac{h}{a} = \chi, \quad \text{továbbá} \quad \frac{d_2}{d_1} = \delta. \quad (9)$$

Ezeket a mennyiségeket használva az úszó hasáb helyzetének határszögei:

ha $\delta < 0,5$, akkor $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2\delta\xi$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \xi/2\delta$

ha $\delta > 0,5$, akkor $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2(1 - \delta)\xi$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \xi/2(1 - \delta)$. (10)

Az egyesített súlypontmélység $\alpha = 0^\circ$ és α_1 között:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2} \delta(1 - \delta) \cdot \xi^2 \cos \alpha - \frac{1}{24} \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha, \quad (11)$$

α_1 és α_2 között, ha $\delta < 0,5$:

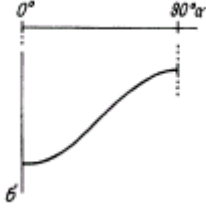
$$\sigma = 1 - \frac{1}{2} \delta \xi (\sin \alpha + \xi \cos \alpha) + \frac{2}{3} \delta \xi \sqrt{\delta \xi \sin 2\alpha}, \quad (12)$$

(ha $\delta > 0,5$, akkor ebben δ helyébe $1 - \delta$ teendő),

végül α_2 és $\alpha = 90^\circ$ között:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2}\delta(1-\delta) \cdot \xi \cdot \sin \alpha - \frac{1}{24}\xi^3 \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha. \quad (13)$$

Látható, hogy minden olyan kísérletpár ugyanarra az eredményre vezet, amelyben a δ -k értéke 0,5-hez képest szimmetrikus, például az egyik kísérletben 0,2, a másikban 0,8. Ilyen esetekben σ -nak α -tól való függése ugyanaz, sőt a hasáb külön súlypontjának $\chi = h/a$ mélysége is ugyanaz, csak ellentétes előjelű, vagyis S a felszín felett van. Ha $\delta = 0,5$, akkor $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_{12} = \xi$ és az $\alpha_1 - \alpha_2$ közötti terület eltűnik, χ pedig mindig 0. Valóban, ha a hasáb sűrűsége a folyadék sűrűségének a fele, akkor a hasáb súlypontja mindig a felszín magasságában marad és a hasáb két ellentétes éle egyszerre lépi át a felszínt.



3. ábra.
A súlypont mélység
függése

Az úszási helyzet stabilitásának eldöntése céljából meg kell vizsgálnunk, miként függ σ egyesített súlypontmélység α elforgatási szögtől (3. ábra). σ -t függőlegesen lefelé mérjük fel. Az egyesített súlypont σ mélysége tulajdonképp az egész berendezés helyzeti energiájának a mértéke. Általában azon α szög mellett jön létre egyensúlyi helyzet, amelynél $d\sigma/d\alpha$ nulla, ugyanis ekkor a hasábra ható erők eredője nulla. Azonban ez az egyensúly csak akkor stabilis, ha a súlypont a szomszédos α -kal jellemzett helyzetekhez képest a legmélyebben van. Ennek feltétele, hogy $d^2\sigma/d\alpha^2$ negatív legyen. K.

Heinold figyelmeztet arra cikkében [1], hogy többféle stabilis helyzet is lehetséges, különböző súlypontmélységekkel, amelyeket egy bizonyos helyzethez tartozó labilis egyensúlyi állapot határol el.

A lehetséges esetekről jó áttekintést kapunk, ha a lehetséges kísérletek adatait δ , ξ koordinátarendszerben tüntetjük fel (4. ábra). Ennek egységnyi oldalhosszúságú négyzetében minden pont egy-egy δ , ξ értékpárral meghatározott kísérletet jelent.

Az egyensúly megkereséséhez az első differenciálhányados szükséges. (11), (13) differenciálásainak eredménye: 0° és α_1 között:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \left[\frac{1}{2}\delta(1-\delta)\xi^2 - \frac{1}{12} \right] \sin \alpha - \frac{1}{24} \cdot \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad (14)$$

α_2 és $\alpha = 90^\circ$ között:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = - \left[\frac{1}{2}\delta(1-\delta) - \frac{\xi^2}{12} \right] \cos \alpha + \frac{1}{24} \cdot \xi^2 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad (15)$$

(14) és (15) mutatja, hogy $\alpha = 0^\circ$ -nál és $\alpha = 90^\circ$ -nál feltétlenül van valamilyen egyensúlyi helyzet. Az egyensúly minőségének megvizsgálására a második differenciálhányadosra van szükség: 0° és α_1 között:

$$\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} = \left[\frac{1}{2}\delta(1-\delta)\xi^2 - \frac{1}{12} \right] \cos \alpha - \frac{1}{24} \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha (3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad (16)$$

α_2 és 90° között:

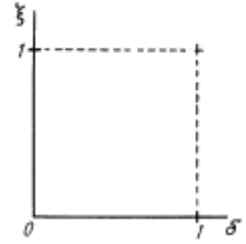
$$\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} = \left[\frac{1}{2}\delta(1-\delta) - \frac{\xi^2}{12} \right] \xi \sin \alpha - \frac{\xi^2}{24} \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha (3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha). \quad (17)$$

Stabilis egyensúlyi helyzethez az szükséges, hogy a második differenciálhányados ne legyen pozitív. $\alpha = 0^\circ$ esetében (16) szerint ennek a feltétele:

$$6\delta(1-\delta)\xi^2 \leq 1,$$

vagyis a 4. ábra koordinátarendszerében ξ nem kerülhet a

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{6\delta(1-\delta)}} \quad (18)$$



4. ábra
A kísérlet adatait
feltüntető
koordinátarendszer

negyedfokú függvény görbéje fölé. Ami az $\alpha = 90^\circ$ -os helyzetet illeti, a (17) szerinti második differenciálhányados akkor lesz nem pozitív, ha

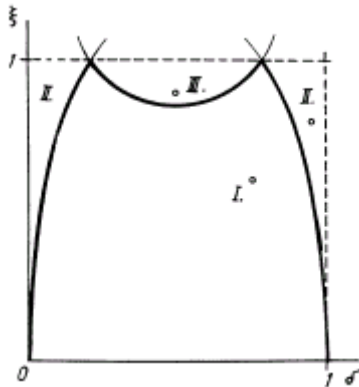
$$6\delta(1-\delta)\xi^2 \leq \zeta^2,$$

vagyis a 4. ábrán ξ nem kerülhet a

$$\xi = \sqrt{6\delta(1-\delta)} \quad (19)$$

ellipszis íve alá.

Ezek után következőképp tekinthetjük át a lehetséges eseteket. A 4. ábra koordináta-rendszerébe belerajzoljuk (18) negyedfokú függvény és a (19) ellipszis íveit (5. ábra). Ezáltal az egységnyi oldalhosszúságú négyzet három tartományra esik szét.



5. ábra

A különböző esetek áttekintése

I. Ha a kísérlet feltételeit ábrázoló δ , ξ -pont ebbe a területbe esik, akkor csak az az úszási helyzet stabilis, amikor a nagyobb területű felület vízszintes. Ebbe a tartományba beletartozik a felső határgörbe, de nem tartozik bele a két szélső határoló görbe.

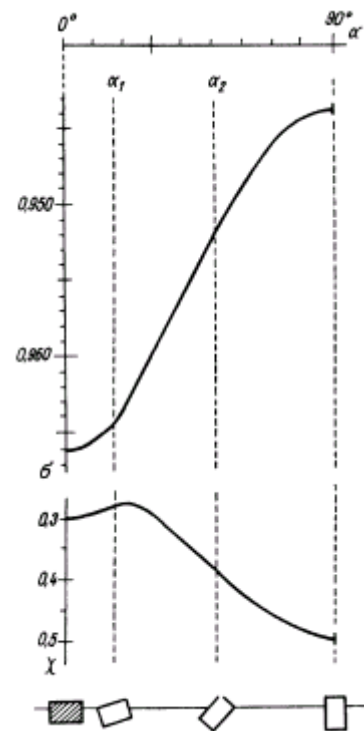
II. Ha a kísérlet feltételeit ábrázoló δ , ξ -pont ebbe a területbe esik (beleértve a határoló görbét), akkor az $\alpha = 0^\circ$ -hoz és az $\alpha = 90^\circ$ -hoz tartozó mindegyik helyzet stabilis.

III. Ha a kísérlet feltételeit ábrázoló δ , ξ -pont ebbe a területbe esik (a határoló görbét nem beleértve), akkor az úszó hasábnak csak olyan helyzete stabilis, amikor egyik éle van felül.

Lássunk egy-egy példát mindegyik esetre.

I. $\delta = 0,75$, $\xi = 0,6$, tehát a rövidebb méret a hosszabb méret $3/5$ része és sűrűsége a folyadék sűrűségének $3/4$ -e. A 6. ábra mutatja az együttes súlypont mélységét, mint a helyzetet jelző α szög függvényét. A második görbe a hasáb külön súlypontjának a helyzetváltozását tünteti fel. Az egyetlen stabilis helyzetben a nagyobb területű lap vízszintes helyzetű. A határszögek $\alpha_1 = 16^\circ 42'$ és $\alpha_2 = 50^\circ 12'$. Ez az eset fordul elő a legtöbbször és ezért ez a legismertebb.

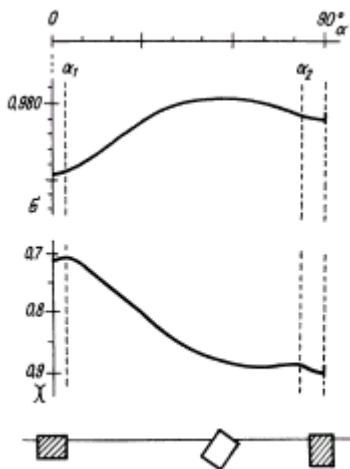
II. $\delta = 0,95$, $\xi = 0,8$, tehát a metszet alakja közeledik a négyzethez és a hasáb sűrűsége majdnem eléri a folyadékét (7. ábra). Most mindkét szélső helyzet stabilis. Az $\alpha = 0^\circ$ -hoz tartozó esetben az eredő súlypont mélyebben van, mint $\alpha = 90^\circ$ -nál, de ennek ellenére az $\alpha = 90^\circ$ -hoz tartozó egyensúlyi helyzet is stabilis. A két területet a kb. $\alpha = 56^\circ$ -hoz tartozó labilis egyensúly választja szét. Ezt a szöveget közelítő számítással kell meghatározni, mert (12) differenciálása magasabb fokú egyenletre vezet. Az 56° -nál nagyobb szögű helyzetben az



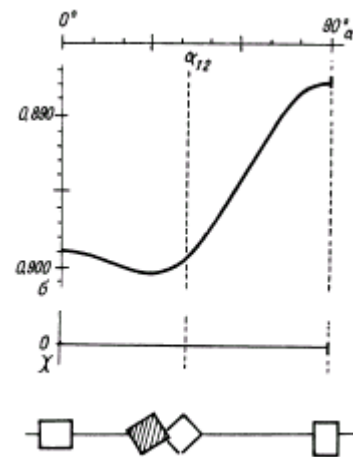
6. ábra

Példa az I. szerinti esetre

álló, kisebbnél a fekvő helyzetbe billen át a hasáb. A határszögek $\alpha_1 = 4^\circ 34'$ és $\alpha_2 = 82^\circ 52'$. A II. csoportba tartozó magatartást plexihasáboknál figyelhetjük meg, ha tömény fixírsó oldatokban vagy higanyon úsztatjuk azokat.



7. ábra
Példa a II. szerinti esetre



8. ábra
Példa a III. szerinti esetre

III. $\delta = 0,5$, $\xi = 0,9$, tehát majdnem négyzet alapú hasáb úszik feles sűrűségű folyadékon. A hasáb súlypontja állandóan a felszín magasságában van, a két határszög egybeesik: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{12} = 42^\circ 00'$. Az $\alpha = 0^\circ$ -hoz és az $\alpha = 90^\circ$ -hoz tartozó két egyensúlyi helyzet egyaránt labilis, viszont $\alpha_{st} = 33^\circ 15'$ -nél stabilis az egyensúlyi helyzet úgy, hogy az egyik él van felül. Ez a helyzet pontosan megállapítható, mert 0° és α_1 között vagyunk és (14) differenciálhányadost 0-val egyenlővé téve azt kapjuk, hogy $\text{tg } \alpha_{st} = \sqrt{3\xi^2 - 2}$. (8. ábra)

IRODALOM

I. K. Heinold, Praxis der Naturwiss. 1967. Heft 5. 123. o.

*Érkezeti 1968. jan. 10.

Különlenyomat. MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT, XVI. kötet, 6. füzet, Budapest, 1968.