

A tömeg fogalma a relativitáselméletben

A múlt évben három cikk a speciális relativitáselmélet alapjait mutatta be (KML. 6., 8–9. és 10. számban). Ezek lényeges eredménye ez volt: ha egy test sebessége kezd a fénysebességhez közeledni, akkor a tér- és időadatok átszámolását a Lorentz-transzformáció szabályaival kell elvégezni. Ha a v sebességgel mozgó testen lakók két esemény között T időtartamot és L hosszúságot mérnek, akkor az álló rendszerben kT időtartamot és L/k hosszúságot észlelnek. Az eltérést jelentő szorzó:

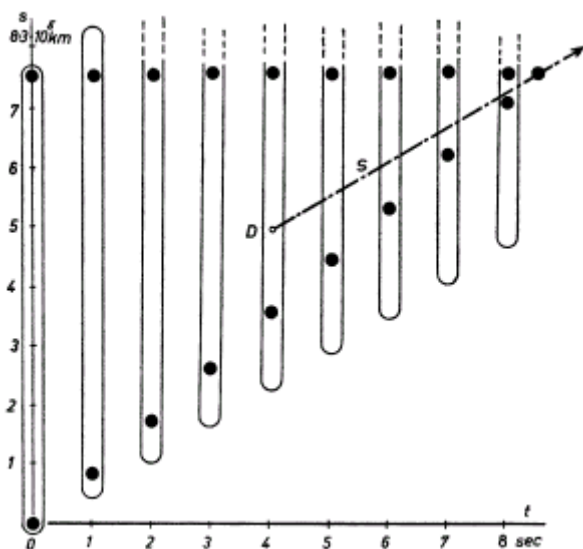
$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

k csak akkor kezd 1-nél észrevehetően nagyobb lenni, ha v sebesség közeledik c fénysebességhez. L a mozgás irányában fekszik, az erre merőleges távolságot mindkét rendszerben egyenlőnek észlelik. Az idő- és távolságadatok sebességtől való függése tapasztalati tény, amelyet tudomásul kell vennünk.

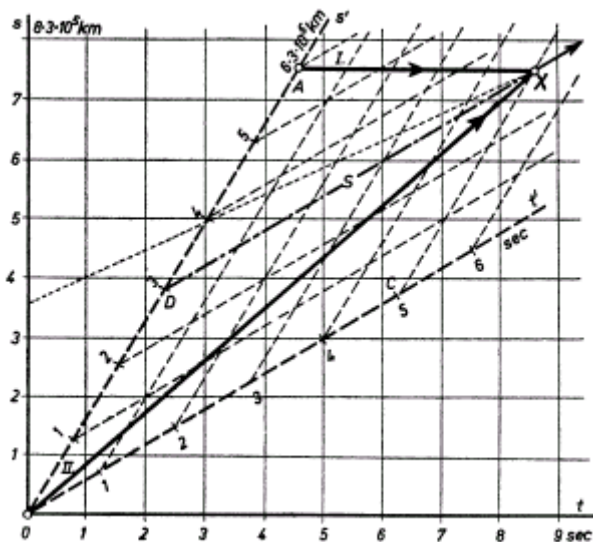
Újra felidézzük az 1973. évi 5. szám 226. oldalán látható ábrát (lásd ezen cikk 2. ábráját). Tulajdonképpen olyan koordináta-rendszerről van szó, amelyet az út-idő grafikonok rajzolására szoktak használni. A folytonos vonallal rajzolt t, s tengelyek az állónak tekintett saját koordináta-rendszerünkben érvényesek. Egy igen hosszú úrhajó, laboratórium (Rellab) mozog az s tengely mentén $v = 3c/5 = 180000$ km/s sebességgel. Ekkor $k = 5/4 = 1,25$. Az O -ból t' felé menő vastag szaggatott egyenes tünteti fel a Rellab hátsó végének útját. A Rellabon érvényes s' úttengely az s -sel zár be $3/5$ tangensű szöveget. A szaggatott vonalakról a Rellabon érvényes tér- és időadatokat le lehet olvasni. Az origókat kényelem kedvéért egybeejtettük. Ha például a Rellabon $t' = 5$ s-kor a $3 \cdot 3 \cdot 10^5$ km = s' helyen (X -pont) gyufát gyújtanak meg, akkor ezt mi $t = 8,5$ s-kor, $s = 7,5 \cdot 3 \cdot 10^5$ km-es helyen észleljük.

Az alapvető mozgástani mennyiségek Lorentz-transzformáció szerinti átszámítása nyilván magával hozza, hogy a mozgást leíró törvények átírása az egyik rendszerből a másikba nem is olyan egyszerű feladat. Ki lehet építeni a speciális relativitáselméleten alapuló, mozgásokat leíró tudományt, a relativisztikus kinematikát. A mi mostani feladatunk ennél még érdekesebb: a dinamika alaptörvényeit fogjuk tanulmányozni, az erő és a tömeg fogalmát. Eközben a tapasztalat által sokszorosán igazolt alapnak kell elfogadnunk a tér-idő azon szerkezetét, amelyet a 2. ábra fejez ki.

Az igen hosszú, hozzánk képest $v = 3c/5$ sebességgel mozgó Rellabon egy kísérletet végeznek. Az 1. ábra a Rellab helyzetét mutatja másodpercről másodpercre. A Rellab lakói joggal tekinthetik magukat nyugvónak, hiszen az egymáshoz képest egyenletes egyenes vonalú mozgást végző koordináta-rendszerek egyenrangúak. Kísérletük a következő. Ugyanabból az anyagból egyenlő átmérőjű golyókat öntenek.



1. ábra



2. ábra

A II. számú golyót $3c/5$ sebességgel gurítják el az egyik irányban. Erről azt észlelik a Rellab lakói, hogy $t' = 0$ -kor $s' = 0$ -ról indult el (O) és $t' = 5$ s-kor érkezett $s' = 3 \cdot 3 \cdot 10^5$ km-hez (X). Az I. számú golyót ugyanebben az egyenesben ellenkező irányban gurították; $t' = 0$ s-kor indult $6 \cdot 3 \cdot 10^5$ km-ről (A) és $t' = 5$ s-kor érkezett $s' = 3 \cdot 3 \cdot 10^5$ km-hez (X), tehát sebessége $-3c/5$. A 2. ábrán a két golyó mozgásának úttörvénye be van rajzolva vastag vonalakkal. X -hez érkeve a szemben ugyanakkora értékű sebességgel haladó golyók rugalmatlanul ütköznek, a golyók megállnak, közös úttörvényüket ezután az X -ből jobbra kiinduló vastag nyíl mutatja.

Nem következhet be más, mint hogy a

golyók megállnak, hiszen anyagukban sincs semmi különbség, sebességeik abszolút értéke egyenlő és mindkét irány egyenrangú. (Ha ütközés után a golyók erre vagy arra mozognának, a Rellab lakói nem értenék, hogy az ő álló világukban miért van különbség a két irány között.) Nyilvánvaló, hogy a golyók megállnak. Ezt a tényt a Rellab lakói úgy szövegezik meg, hogy a golyók tehetetlenségének mértéke — tömege — egyenlő volt, akármelyik választható lett volna m_0 tömegegységnek. Igaznak találták az impulzustörvényt is, hiszen a $+3m_0c/5$ és $-3m_0c/5$ impulzusok összege az ütközés előtt nulla és nyilvánvalóan utána is.

A Rellabon megvizsgálták a két golyó közös súlypontjának a viselkedését is. Egyenlő tömegek esetében ez mindig a tömegeket összekötő egyenesszakasz felezőpontjában van. Úttörvény-ábránkon a közös súlypont a $D-S-X$ vonalon mozog, t' -vel párhuzamosan (D az OA szakasz felezőpontja). Ha a Rellabon egy hosszú deszkát fektettek végig, amely mindössze egy ékkel van alátámasztva (az alátámasztási pont $t' = 0$ -ban éppen a D pont), és ezen a deszkán gurulnak a golyók, akkor az egész kísérlet közben a deszka nem billen meg.

Az előző két bekezdésben leírt tapasztalatot, hogy miként észlelték az egyenlő tömegű golyók rugalmatlan ütközését, az esti hírek között leadja a Rellab rádióadója, hogy a lakosságuk értesüljön erről a természeti tényről. Azzal, hogy az ő „nyugvó” világukon kívül van-e még valami, nem is törődnek.

Azonban mi is létezőnk a $t-s$ úgynevezett álló koordináta-rendszerünkkel együtt. Fizikusaink magnószalagra vették a Rellab adását és másnapi értekezletükön megvitatják annak tartalmát. A Rellab ugyanis átlátszó műanyagból készült, a benne történeteket mi is megfigyeltük (1. ábra). Mit láttunk? (Ne felejtsük el, a golyók csak egyféleképp viselkedhettek, amint azt az 1. és 2. ábrák mutatják, tekintet nélkül arra, hogy kik, hányan és honnan nézik őket!)

A mi fizikusaink a következőket észlelik. Az egyik golyó (II.) O -ból indulva $t = 8,5$ s-kor ért $s = 7,5 \cdot 3 \cdot 10^5$ km-hez, tehát sebessége $V = 7,5c/8,5 = 15c/17$ volt. A másik golyó az ütközésig mozdulatlanul állt $7,5 \cdot 3 \cdot 10^5$ km-nél (I.). Fizikusaink azt is látták, hogy a golyók egy a közepénél alátámasztott hosszú deszkán gurultak, az ék azonban nem a két golyó távolságának felezőpontjában volt, hanem II.-höz közelebb (a két golyó indulása a Rellabon, egyidejű esemény, de a mi koordináta-rendszerünkben nézve, mivel a két esemény nem azonos pontban történt, már nem egyidejű). A rugalmatlan ütközés után az összetapadt golyók az ék fölött megállva mozogtak vele együtt tovább $v = 3c/5$ sebességgel. Nem kétséges fizikusaink véleménye, a II. golyó nagyobb tömegű, mint az I. golyó. Mindezen nincs mit csodálkozniuk, ezt észlelték és így van. De most jön valaki a Rellab-szöveggel, amely

egyenlő tömegű golyók ütközéséről szól. Másnap a Rellabon takarítás van, a golyókat kidobálják, tudósaink megtalálják azokat, észlelik, hogy mindenben egyeznek, az ütközési próba és a súlypontvizsgálat folyamán is. Fizikusaink nem tehetnek mást, mint hogy rájönnek a relativitáselméletre. El kell fogadnunk, ha a Rellabon mint nyugvó rendszeren két golyót egyenlő tömegűnek észlelnek, akkor a hozzájuk képest mozgó rendszerből észlelve a tömegek a sebességtől függően változnak.

A mi fizikusaink számára az I. golyó nyugszik, tömegét használhatjuk, mint m_0 tömegegységet. Azonban a $V = 15c/17$ sebességgel mozgó II. golyó tömege ekkor xm_0 . Ha az ütközés előtti impulzusösszeg egyenlő a súlypontban egyesítve gondolt tömeg impulzusával, akkor:

$$m_0 \cdot 0 + xm_0 \cdot \frac{15}{17} \cdot c = (m_0 + xm_0) \cdot \frac{3}{5} \cdot c.$$

Innen $x = 17/8$. Ennyiszor nagyobb a V sebességgel mozgó tömeg. De ez a szám éppen a V sebességhez tartozó k -szorzó:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (15/17)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17^2 - 15^2}} = \frac{17}{8} = x.$$

A nyugalomban m_0 nagyságú tömeg V sebesség mellett:

$$m = km_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

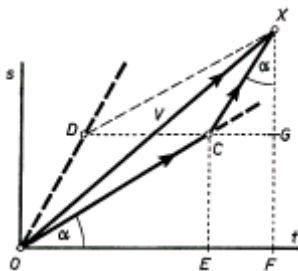
Az egyetlen numerikus esetben észlelt összefüggést természetesen általában is le kell vezetni. Az előbbi impulzustörvény:

$$m_0 \cdot 0 + xm_0 V = (m_0 + xm_0)v,$$

illetve

$$xV = v + xv.$$

Most a Rellab v sebessége helyébe be kell hoznunk a golyó hozzánk viszonyított V sebességét. Ehhez a relativitáselmélet sebességösszegezési szabálya volna szükséges, amit a mi egyszerű esetünkben könnyen megkaphatunk.



3. ábra

A 3. ábrán t' iránytangense $\operatorname{tg} \alpha = v/c$. Az s' tengely szimmetrikus a középvonalhoz, ezért X -nél is α szög van. Mivel az egyik tömeg nyugszik, az $OCXD$ paralelogramma rövidebb átlója vízszintes és C pont ordinátája az X ordinátájának a fele, $CE = FG = XG$. Ha az OE időt t -nek vesszük akkor $CE = FG = XG = vt$. Továbbá $CG = GX(\operatorname{tg} \alpha)/c = (vt)(v/c^2) = v^2 t/c^2 = EF$. A keresett V sebesség az XOF szög tangense:

$$V = \operatorname{tg} XOF \leftarrow \frac{XG + FG}{OE + EF} = \frac{vt + vt}{t + tv^2/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}.$$

Ezt helyettesítjük az $xV = v + xv$ impulzustörvénybe, amiből

$$x = [1 + (v/c)^2] : [1 - (v/c)^2].$$

A fenti V -vel nyerjük a következő összefüggést:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = [1 + (v/c)^2] : [1 - (v/c)^2]$$

Ugyanazt kaptuk, tehát x valóban a V sebességhez tartozó k szorzó.

Foglaljuk össze nyert eredményeinket: A két, egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgásban levő koordináta-rendszer között az adatok átszámítására a Lorentz-féle képleteket kell használni. Ebből szükségképpen következik, hogy az impulzus állandóságának a törvénye és a tömeg sebességtől való függetlensége összeférhetetlen állítások. Einstein próbaképpen az impulzustörvény érvényességét tételezte fel, amiből az következett, hogy a V sebességgel mozgó m_0 nyugalmi tömegű test tömege km_0 . A tapasztalat sokszorosán igazolta ezen elméleti feltételezés jogosságát. Pontos mérésekkel igazolták, hogy a gyorsan mozgó elektronok tömege szigorúan a km_0 képlet szerint mutatkozik nagyobbak. Minden gyorsítóberendezés tervezésénél pontosan figyelembe kell venni a tömegnövekedést, gyakorlati esetben k értéke 100–1000 is lehet.

Az impulzus állandóságának törvénye minden sebességnél, mindegyik koordináta-rendszerben igaz, ha a tömeget km_0 értékkel számoljuk. Az erőt a relativitáselmélet mint az időegységre jutó impulzusváltozást definiálja. A nyugalmi tömeg és a gyorsulás szorzata általában ettől eltérő értéket ad. Kis sebességeknél a relativisztikus dinamika a klasszikus dinamikába megy át, a tehetetlenség mérőszáma megegyezik a nyugalmi tömeggel.

Megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok 49. kötet 3–4. számában, Budapest, 1974. novemberében