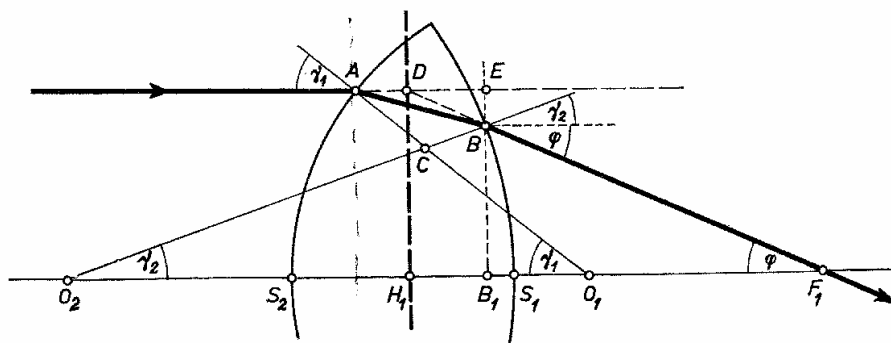


A vastag lencsék

A lencsék működését a fénytörés törvénye magyarázza meg. A tárgy valamely pontjából kiinduló fénysugarak mindegyike a lencsén áthaladva kétszer törik meg és a lencsén átment sugarak újra egyetlen pontban találkoznak. A tárgy lencsétől mért t távolsága a tárgytávolság, a kép k távolsága a képtávolság. A tengellyel párhuzamosan beeső sugarak találkozási pontja a fókusz, ennek a lencsétől mért f távolsága a fókusz távolság. A lencse anyagának n törésmutatójából és határoló gömbfelületeinek r_1, r_2 rádiuszaiból kiszámítható a fókusz távolság: $1/f = (n - 1)(1/r_1 + 1/r_2)$, továbbá érvényes a képképzés törvénye: $1/f = 1/t + 1/k$. E két képlet a fénytörés törvényéből vezethető le, de csak közelítően érvényes akkor, ha a fénysugarak a tengely közelében haladnak, ha az előforduló beesési és törési szögek kicsinyek, ha a törésmutató nem függ a hullámhossztól és ha a lencse elhanyagolható vastagságú. Ilyen vékony lencsénél elegendő az az utasítás, hogy f, t, k „a lencsétől” mérendők.

A lencse véges vastagságát számítással könnyen figyelembe lehet venni. Ekkor kapjuk a véges vastagságú lencsére érvényes képleteket. De a többi közelítés szükségessége most is megmarad! Lássuk ezt a számítást!

A lencse felületeinek rádiuszai $r_1 = AO_1$ és $r_2 = BO_2$, vastagsága $d = S_1S_2$, anyagának törésmutatója n (1. ábra). A tengellyel párhuzamosan beeső fénysugár A -ban éri el az első lencsefelületet, itt megtörik, B -be érkezik és ismét törik. A lencsét elhagyó fénysugár F_1 fókuszpontban metszi a tengelyt. Ábránk vastag vonala a fénysugár tényleges útját tünteti fel. Hosszabbítsuk meg a belépő és kilépő fénysugarak egyeneseit: megkapjuk ezek D metszéspontját. Formálisan, szerkesztés alkalmával úgy vesszük, mintha a vízszintesen haladó fénysugár D -ben változtatta volna meg haladási irányát. A rádiuszok tengellyel alkotott szögei γ_1 és γ_2 , a kilépő sugár tengellyel alkotott szöge φ ; ezeket a szögeket a rajzban még több helyen is megtaláljuk. Közelítéseink miatt csak kis szögek szerepelhetnek, ezért az üvegben mért törési szögeket a törésmutatóval való osztással kapjuk meg: $BAC(\angle) = \gamma_1/n$ és $ABC(\angle) = (\gamma_2 + \varphi)/n$. Az $ABC\Delta$ és az $O_1CO_2\Delta$ tompaszöge egyenlő, tehát két-két hegyes szögének összege is egyenlő:



1. ábra

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2 + \varphi}{n}.$$

Ebből az egyenletből:

$$\varphi = (n-1)(\gamma_1 + \gamma_2). \quad (1)$$

Ez az egyenlet teszi lehetővé a fókusz távolság kiszámítását, ha a szögekről távolságokra térünk át.

Az F_1 fókuszpont távolságát mérjük H_1 -től, vagyis a D ponton átmenő függőleges síktól: $f = H_1F_1$. A szögeket radiánokban számítjuk. Ha kicsinyek, akkor írható, hogy $\varphi = DH_1/f$, $\gamma_1 = DH_1/r_1$ és $\gamma_2 = BB_1/r_2$. Így az (1) egyenlet:

$$\frac{DH_1}{f} = (n-1) \left[\frac{DH_1}{r_1} + \frac{BB_1}{r_2} \right],$$

illetve:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} + \frac{BB_1}{DH_1} \cdot \frac{1}{r_2} \right]. \quad (2)$$

Számításainkra az lesz jellemző, hogy a tengellyel párhuzamos távolságok (például B_1S_1) tekintetében elhanyagolunk, hiszen számításunk csak a tengely közelében haladó sugarakat vesz figyelembe, de a tengelyre merőleges irányban pontosan számolunk. Ennek oka, hogy a fénysugarakkal a tengely felé haladva a tengellyel párhuzamos irányban elkövetett elhanyagolások sokkal gyorsabban közelednek nullához, mint a tengelyre merőleges irányban elkövetett közelítések. Ez az ábrából is felismerhető, hiszen a körív B_1S_1 eltérése az érintőtől négyzetesen csökken, ha a sugárral közeledünk a tengelyhez, viszont EB igen nagy lehet vastag lencsénél. Így BB_1 -et és DH_1 -et nem vehetjük egyenlőnek, a BB_1/DH_1 törtet ki kell számítanunk.

A BAE derékszögű háromszögből $BE = AB \sin BAE$. Az AB távolságot közelítően $d = S_1S_2$ lencsevastagsággal, a szög szinuszát radiánban számolt szöggel vesszük egyenlőnek: $BAE = CAE - CAB = \gamma_1 - \gamma_1/n$. Ennek alapján $BE = d(\gamma_1 - \gamma_1/n) = d \gamma_1(n-1)/n = DH_1 \cdot d(n-1)/(r_1 n)$ és $BB_1 = DH_1 - BE = DH_1 - DH_1 \cdot d(n-1)/(r_1 n)$, így:

$$\frac{BB_1}{DH_1} = 1 - d \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{r_1}. \quad (3)$$

Ezt (2)-be helyettesítve kapjuk a fókusz távolság képletét abban az esetben, ha a lencse vastagságát figyelembe vesszük:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{r_1 r_2} \right]. \quad (4)$$

A fénysugár magasságát megadó DH_1 távolság kiesése azt jelenti, hogy minden párhuzamosan beeső fénysugár F_1 -ben találkozik, amennyiben közelítéseink teljesülnek.

Szükségünk van még a $d_1 = H_1S_1$ távolságra, hogy tudjuk, honnan kell mérni a fókusz távolságot. A BED derékszögű háromszögből:

$$DE = BE / \varphi = (DH_1 - BB_1) / \varphi = f \left(1 - \frac{BB_1}{DH_1} \right).$$

Ide f (2) alatti és BB_1/DH_1 (3) alatti értékeit helyettesítve:

$$d_1 = \frac{dr_2}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}. \quad (5)$$

A DH_1 sík neve fősík, a kilépő lencsefelülettől mért d_1 távolságát ez a képlet adja meg. Ha a fény a tengellyel párhuzamosan jobbról jön, akkor az indexek felcserélésével a második fősík távolsága a bal oldali felülettől:

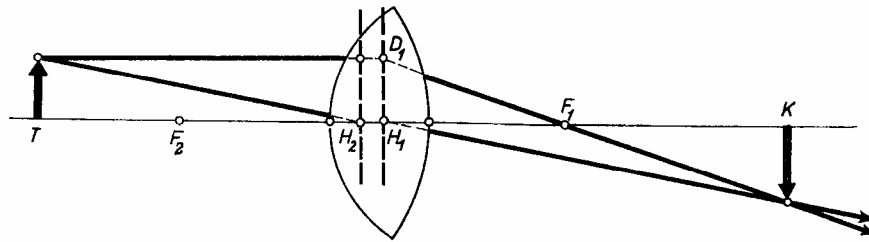
$$d_2 = \frac{dr_1}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}. \quad (5')$$

A fősíkok távolsága:

$$H_1H_2 = d(n-1) - \frac{r_1 + r_2 - d}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}$$

A fókusz távolság (4) alatti képletében az indexek szimmetrikusan fordulnak elő, tehát a fókusz távolság mindegyik oldalon ugyanakkora. Természetesen $d = 0$ esetében a vékony lencsék közismert képletei adódnak.

1. ábránk pontos rajz abban az esetben, ha $n = 1,5$. A rádiuszok $r_1 = 4$ cm és $r_2 = 6$ cm, $d = 3$ cm. A fókusz távolság $f = 16/3 = 5,33$ cm, a fősíkok távolságai $d_1 = 4/3 = 1,33$ cm és $d_2 = 8/9 = 0,89$ cm. $d = 0$ esetében lencsénk fókusz távolsága 4,8 cm lenne. Az eltérés nem túlságosan sok, de nem tudnánk, honnan mérjük a fókusz távolságot.

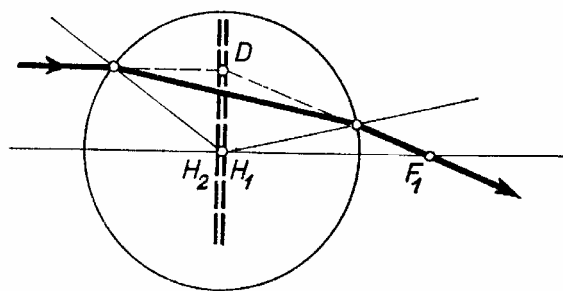


2. ábra

Mindezek alapján egy vastag lencsénél következőképp kell eljárunk. Először kiszámítjuk (5) és (5') alapján d_1 -et és d_2 -t. d_1 -et a kilépő felülettől balra, d_2 -t a belépő felülettől jobbra mérjük fel és megkapjuk H_1 , H_2 fősíkok helyét. Azután kiszámítjuk (4) szerint a fókusz távolságot; f -et H_1 -től jobbra felmérve F_1 -et, H_2 -től balra felmérve F_2 -t kapjuk meg. Ha d_1 , d_2 , f közül valamelyik negatív, az irányt fordítva kell venni. 2. ábránk az 1. ábra lencséjére vonatkozik, de felére kicsinyítve. Az adott T tárgyról az egyik szerkesztési sugarat a tengellyel párhuzamosan addig rajzoljuk, amíg eléri az első fősíkot D_1 -ben; a kilépő sugarat F_1 -en keresztül rajzoljuk. A második szerkesztési sugarat H_2 -nek irányítjuk és önmagával párhuzamosan eltolva folytatjuk H_1 -ből. A kilépő sugarak metszéspontja adja meg K képet. A tárgytávolság a második, a képtávolság az első fősíktól mérendő: $t = TH_2$, $k = H_1K$; ezekre a távolságokra teljesül az $1/t + 1/k = 1/f$ lencsetörvény. A helyzet kb. olyan, mintha a görbült lencsefelületek közé egy planparalel lemezt toltunk volna be. Eljárásunkkal a lencse vastagságának szerepét pontosan figyelembe vettük, de a többi közelítés feltétele megmarad és a lencsehibák ugyanacsak fellépnek.

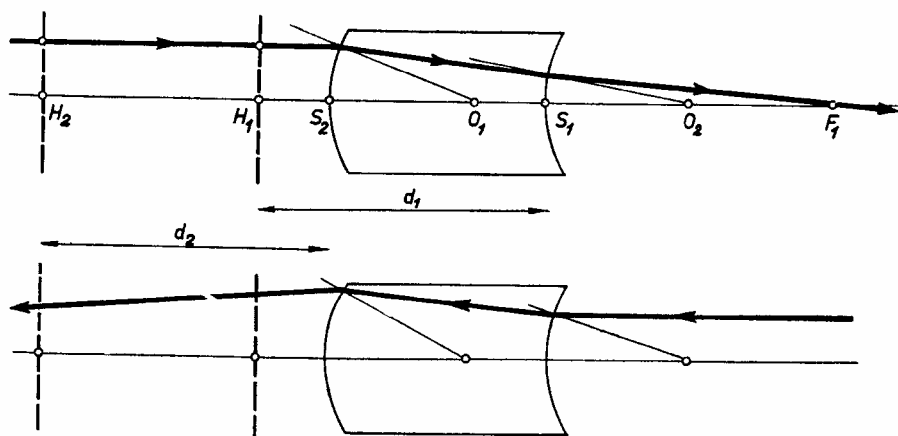
Lássunk néhány példát vastag lencsére.

1. Gömb mint lencse (3. ábra). Ekkor $r_1 = r_2 = r$, $d = 2r$; képleteink szerint $f = nr/2(n-1)$, $d_1 = d_2 = r$. Tehát mindkét fősík a középpontba kerül. Ha a lencse anyaga 1,5-es törésmutatójú üveg, akkor $f = 1,5r$, ha víz, akkor $n = 4/3$ és $f = 2r$, mindegyik esetben a középponttól mérve. Mindez hengerlencsére is érvényes és vízzel, folyadékkal telt gömbömbikkal, hengerpohárral vizsgálható.



3. ábra

2. Álljon lencsénk két egyező rádiuszú, ellentétes görbületű gömb- vagy hengerfelületből (4. ábra). Ha a felületek közel vannak, akkor a szerkezet planparalel lemezként viselkedik, de ha vastagsága nagy, akkor lencseként működik. Ekkor $r_1 = r$, $r_2 = -r$, így $f = nr^2/d(n-1)^2$, $d_1 = r/(n-1)$, $d_2 = -r/(n-1)$. 4. ábránkon $r = 2$ cm, $n = 1,5$, $d = 1,5r$, $d_1 = 2r$, $d_2 = -2r$, $f = 4r$. Tanulságos a fordított irányú sugármenet tanulmányozása is (alsó rajz).



4. ábra

Pályázat vastag lencséről

Vizsgáljuk meg a vastag lencék viselkedését elméletileg és kísérletekkel. (Lásd az erről szóló cikket.) Vastag lencék előállításának néhány módja: üvegtéglához plankonvex lencsét illesztünk, üveg poharakat és lombikokat megtöltünk különböző törésmutatójú folyadékokkal; egymásba állított üveghengerek hézagját töltjük ki folyadékkal, folyadékkal telt kádba felülről gömbömbikot nyomunk be (az optikai tengely ekkor függőleges) stb. Az elméleti feladat ezekben az esetekben a fősíkok megkeresése, a fókusz távolság meghatározása, a leképezési törvény tanulmányozása és az eredmények egyeztetése a kísérletekkel.

A pályázat beküldésének határideje: 1968. jan. 15.

Megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok 35. kötet 3–4. számában, (1967. évi 8–9. szám)